ソフトウェアモデル論（2013年度）
第9回・2013/11/21

桑原 寛明
情報理工学部 情報システム学科

連絡事項

- 次回（11/28）は休講にします
- 12/21（土）に補講を行う予定です
  - 時限や教室は未定
  - 掲示に注意すること

例：M_{inc} のコード化 （復習）

- 状態数 4
  - { 0, 1, 2, fin }
- 記号数 3
  - { 0, 1, B }
- 遷移関数
  - (0,0,R), (0,1,R), (1,B,L), (2,1,L), ..., (fin,B,R)
- よって

  (4, 3, (0,0,R), (0,1,R), (1,2,L), ..., (3,2,R))

δ のコード化の例 （復習）

- M_{inc} の遷移関数

状態	記号	遷移関数値
0	0	(0, 0, R)
0	1	(0, 1, R)
0	B	(1, B, L)
1	0	(2, 1, L)
1	1	(1, 0, L)
1	B	(fin, 1, N)
2	0	(2, 0, L)
2	1	(2, 1, L)
2	B	(fin, B, R)

順に並べる

(0,0,R), (0,1,R), (1,B,L), (2,1,L), (1,0,L), ...

チューリング機械計算可能 （復習）

- 世の中の問題は関数 f として表されるとする
  - 関数 f は Σ^* 上の（部分）関数
- f がチューリング機械計算可能であるとは、f を計算するチューリング機械が存在すること
  - f を計算するTMは一通りではない

<u>計算可能性をチューリング機械を用いて定義</u>

チャーチの提唱 （復習）

あるいはチャーチ＝チューリングの定立

- チューリング機械で記述できる以上の計算能力を持つ計算原理は存在しない。従って、チューリング機械計算可能性を計算可能性の基準として用いるのは妥当である。

万能チューリング機械 （復習）

- 以下の関数 comp を計算するチューリング機械

$$comp(p,x) = \begin{cases} M(x) & \text{if } p \text{ があるチューリング機械 } M \text{ のコード} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- チューリング機械の実装としては万能チューリング機械だけあればよい
  - その他のチューリング機械はコードさえあれば万能チューリング機械で実行できる

チューリング機械の停止性 （復習）

- チューリング機械が関数を計算するとは
  - チューリング機械が停止し、かつ
  - チューリング機械が計算結果を出力する
- チューリング機械 M が関数 f を計算するか判定するには
  - M が停止するか判定し
  - 計算結果が正しいか判定する

チューリング機械の停止性判定 （復習）

- チューリング機械が停止するか判定

$$halt?(p,x) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \text{ があるチューリング機械 } M \text{ のコード} \\ & \quad \text{かつ } M(x) \text{ が正常終了} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- halt? は計算不可能
  - halt? を（任意の p と任意の x に対して）計算できるチューリング機械は存在しない

重要なことは （復習）

- 計算可能性の定義
  - チャーチの提唱
- 万能チューリング機械が存在する
- 計算不可能な関数が存在する
  - その関数を計算するチューリング機械が存在しない
    - 計算するアルゴリズムが存在しない
  - 停止性判定、文脈自由文法の曖昧性判定、など
  - 計算不可能な関数はたくさんある
    - チューリング計算機は可算無限個、関数は非可算個

命題論理

命題

- 内容の真偽が確定できる文
  - 加算はチューリング機械計算可能である
  - 1と10は等しい
  - 情報理工学部の学生数は2058人である
- 命題同士が関連することもある
  - 風が吹くと桶屋が儲かる
  - 風が吹く
  - ⇒ 桶屋が儲かる

論理学

- 命題の集まりについて、ある命題の真偽が他の命題の真偽にどのように影響するか、命題間の関連を系統的に調べる学問
- 数理論理学
  - 数学における形式手法、記号的手法を用いて行う論理学

論理学

- 命題論理
  - 命題間の関係
- 述語論理
  - 対象と述語
    - すべての○○について…、ある○○について…
- 様相論理
  - 可能性、必然性
- 時相論理
  - 時系列

計算機科学における数理論理学の応用

- 論理回路、順序回路
- （論理）プログラミング
- モデル検査
- 定理自動証明

など

命題論理

- 命題の真偽に関する論証を行う
- 以下のみに着目して論証
  - 最も基本的な命題の真偽
    - 真偽が他の命題の真偽に影響されない
  - 命題の組合せ構造
- 命題の具体的内容は無視
  - 命題の構造を記号列として表現

命題変数

- 命題を表す変数
  - 命題が述べる内容には興味がない
  - 興味があるのは命題の真偽と関係
- 特に、原子命題を表す記号
  - 原子命題：最も基本的な命題

論理式

- 命題を表す記号列

1. 命題変数は論理式である
2. P, Q が論理式であれば
   - $(\neg P)$　　否定、～でない
   - $(P \wedge Q)$　　連言、かつ
   - $(P \vee Q)$　　選言、または
   - $(P \rightarrow Q)$　　含意、ならば

   は論理式である
3. 1. と 2. から作られるものだけが論理式である

括弧の省略

- 論理演算子の優先度と結合の方向を決めて括弧を省略
- 優先度
  - ¬、∧、∨、→ の順
- 結合の方向
  - ∧、∨ は左結合
    - p ∧ q ∧ r は((p ∧ q) ∧ r) の意味
  - → は右結合
    - p → q → r は(p → (q → r)) の意味

十分条件、必要条件、逆、裏、対偶

- P = p → q
- p は q であるための十分条件
- q は p であるための必要条件

- P の逆
  - q → p
- P の裏
  - ¬p → ¬q
- P の対偶
  - ¬q → ¬p

意味論

- 論理式の意味とは論理式の真理値
  - 真 or 偽

- 以下の2つから決まる
  - 命題変数の真理値
  - 論理演算子（¬、∧、∨、→）の意味

解釈

- 命題変数の真理値を定義する関数
  - true : 真、false : 偽

- 解釈を I、命題変数の集合を Σ とすると
  I : Σ → { true, false }

- すべての p∈Σ に対して I(p) = true または
  I(p) = false

解釈の例

- Σ = { p, q, r } とすると解釈は8通りあり得る

	p	q	r
I_1	true	true	true
I_2	true	true	false
I_3	true	false	true
I_4	true	false	false
I_5	false	true	true
I_6	false	true	false
I_7	false	false	true
I_8	false	false	false

論理演算子の意味

- 真理値関数によって定義
  - 以下の Not, And, Or, Imp がそれぞれ否定、連言、選言、含意の意味を定義

P	Not(P)
true	false
false	true

P	Q	And(P,Q)	Or(P,Q)	Imp(P,Q)
true	true	true	true	true
true	false	false	true	false
false	true	false	true	true
false	false	false	false	true

論理式の意味

- 命題変数の集合 Σ
- 解釈 I のもとでの論理式 P の真理値 $V_I(P)$
  - 解釈は命題変数の真理値を決める

$$V_I(P) = \begin{cases} I(p) & P \text{ が命題変数 } p \in \Sigma \text{ の場合} \\ \mathrm{Not}(V_I(Q)) & P \text{ が } \neg Q \text{ の場合} \\ \mathrm{And}(V_I(Q), V_I(R)) & P \text{ が } Q \wedge R \text{ の場合} \\ \mathrm{Or}(V_I(Q), V_I(R)) & P \text{ が } Q \vee R \text{ の場合} \\ \mathrm{Imp}(V_I(Q), V_I(R)) & P \text{ が } Q \rightarrow R \text{ の場合} \end{cases}$$

モデル

- 論理式集合 Φ
- 解釈 I
- I が Φ のモデルである
  iff
  Φ に含まれるすべての論理式 P∈Φ について I(P) = true
- $\models_I \Phi$ あるいは $I \models \Phi$ と書く

論理的帰結

- 論理式集合 Φ
- 論理式 P
- P は Φ の論理的帰結である
  iff
  すべての解釈 I について、I が Φ のモデルならば I は P のモデルでもある
- $\Phi \models I$ と書く

トートロジー（恒真式）

- 論理式 P
- P はトートロジーである
  iff
  すべての解釈 I に対して $I \models P$
- 任意の解釈のもとで真になる
- 例えば、$p \vee \neg p$ はトートロジー

充足可能

- 論理式集合 Φ に対してモデルが存在するならば Φ は充足可能である
- 論理式 P に対してモデルが存在するならば P は充足可能である
- 充足可能でなければ充足不能

恒偽式

- 充足不能な論理式
- どのような解釈のもとでも偽である
- 例えば、$p \wedge \neg p$ は恒偽式

論理的帰結の判定

- 論理式 P が論理式集合 Φ の論理的帰結であるか判定したい
- 手順？
  1. すべての解釈について Φ のモデルであるか調べる
  2. Φ のモデルであるすべての解釈のもとで P が真であるか調べる
- Φ と P に含まれる命題変数が n 種類ならば 2^n 通りの解釈について調べなければならない
  ⇒ 効率が悪い