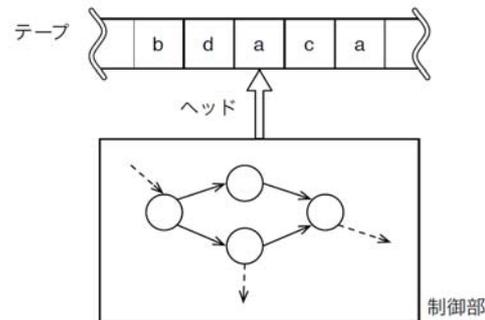


ソフトウェアモデル論(2013年度) 第7回・2013/11/07

桑原 寛明
情報理工学部 情報システム学科

概念図

(復習)



ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

2

チューリング機械の動作

(復習)

1. ヘッドの位置のマスを読み
2. 読んだ記号に従って状態を遷移する
 - 終了状態へ到達したら終了
3. ヘッドの位置のマスに記号を書く
4. ヘッドの位置を
 - a. 1マス右へ移動する
 - b. 1マス左へ移動する
 - c. 移動しない
5. 1.へ戻る

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

3

チューリング機械の定義

(復習)

$$M = (Q, \delta, \Sigma, \Gamma)$$

Q : 状態の有限集合 ($\neq \emptyset$)

$q_0 \in Q$: 初期状態

$q_{fin} \in Q$: 終了状態

δ : 遷移関数

$$(Q - \{q_{fin}\} \times \Gamma) \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$$

Σ : 入出力記号の有限集合

Γ : テープ記号の有限集合

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

4

チューリング機械の計算状況

(復習)

- 計算中のチューリング機械の様子は、制御部の状態、テープの内容、ヘッドの位置で決まる

(q, ω, ω')

- q : 制御部の状態
- ω : ヘッドより左側のテープの内容
- ω' : ヘッドから右側のテープの内容 (ヘッド位置含む)

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

5

チューリング機械の計算動作

(復習)

- 計算状況を遷移関数に従って変えること

- $q \in Q, u, v \in \Sigma^*, a, b \in \Sigma$ とすると

$$(q, ub, av) \vdash \begin{cases} (q', u, ba'v) & \text{if } \delta(q, a) = (q', a', L) \\ (q', uba', v) & \text{if } \delta(q, a) = (q', a', R) \\ (q', ub, a'v) & \text{if } \delta(q, a) = (q', a', N) \end{cases}$$

- \vdash が1回の計算動作を表す

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

6

例: M_{inc} (例2.1)の計算動作 (復習)

- 入力 x が 101 の場合

$(0, B, 101B) \vdash (0, B1, 01B) \vdash (0, B10, 1B)$

$\vdash (0, B101, B) \vdash (1, B10, 1B) \vdash (1, B1, 00B)$

$\vdash (2, B, 110B) \vdash (2, B, B110B) \vdash (fin, B, 110B)$

ソフトウェアモデル論(2013/11/07) 7

チューリング機械の計算 (復習)

- 入力 x に対するチューリング機械の計算
 - x に対する初期状況から計算動作を繰り返す過程の総称
- 計算列
 - 計算動作に伴って変化する計算状況の列
- 計算の正常終了
 - 正常終了状況に到達

ソフトウェアモデル論(2013/11/07) 8

関数を計算するチューリング機械 (復習)

- 関数 f を計算するチューリング機械 M
 - f は Σ^* 上の1変数(1引数)関数
- $x \in \text{dom}(f)$ ならば M に x を入力して実行すると $f(x)$ を出力して正常終了
- $x \notin \text{dom}(f)$ ならば M に x を入力して実行すると正常終了しない
- 結果を $M(x)$ と書く(出力以外に終了状況を含む)

ソフトウェアモデル論(2013/11/07) 9

例: $inc(x)$ (復習)

- 正確には

$$inc(x) = \begin{cases} n+1 \text{ の 2 進数表記} & \text{if } x \text{ がある } n \in \mathbb{N} \text{ の 2 進数表記} \\ \text{未定義} & \text{otherwise} \end{cases}$$
- x が正しい2進数でなければ未定義
 - 正しくない(定義域に含まれない)入力の場合は正常終了しない
 - 正しい2進数
 - 値が0でなければ最上位桁は1

ソフトウェアモデル論(2013/11/07) 10

例: $inc(x)$ を計算する TM M'_{inc} (復習)

$M'_{inc} = (\{0, 1, fin, 0', 1', 2'\}, \delta, \{0, 1\}, \{0, 1, B\})$

ソフトウェアモデル論(2013/11/07) 11

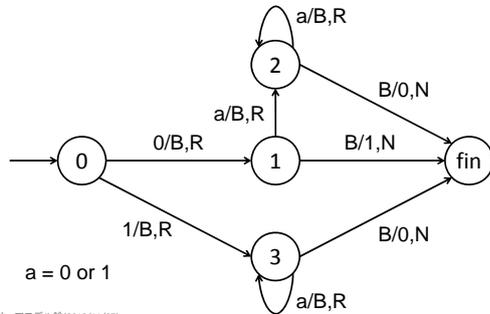
述語

- すべての $x \in \Sigma^*$ に対して 0 または 1 を返す関数
 - 1 ならば真
 - 0 ならば偽
- 述語の定義域は Σ^* 全体なので、対応する TM は任意の入力に対して正常終了しなければならない
 - 終了状況が $(q_{fin}, B, 1B)$ または $(q_{fin}, B, 0B)$

ソフトウェアモデル論(2013/11/07) 12

例: is_valid_binary_num(x)

- x が正しい2進数ならば真



ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

13

修正: 図2.7

- $\delta(1, B) = (\text{fin}, 0, N)$

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

14

多変数(多引数)関数の計算

- 引数の区切りを表す特殊な記号(資料では#)を利用して1変数関数として計算する
- 初期状況 $(q_0, B, x_1 \# x_2 B)$

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

15

データのコード化

- 入出力記号の集合 Σ を $\{0, 1\}$ に制限する
- 制限しても困ることはない
 - すべてを2進数で表せばよい

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

16

自然数のコード化

- 例えば2進数
 - 0を除いて先頭が0でない2進数で表す
- $0_{10} = 0_2$
- $5_{10} = 101_2$
- $15_{10} = 1111_2$

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

17

英文字、数字、記号のコード化

- 例えばASCII
 - 8ビットで1記号
- A \rightarrow 01000001
- 1 \rightarrow 00110001
- (\rightarrow) 00101000

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

18

データの組や列のコード化

- (2, AC) や (1, 0, 0, 123) など
- 英文字、数字、カンマや括弧などの記号をすべてASCII化して並べる
- (2,AC) \rightarrow 00101000 00110010 00101100 ...
- (1,0,0,123) \rightarrow 00101000 00110001 00101100 ...

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

19

2引数関数の1引数化

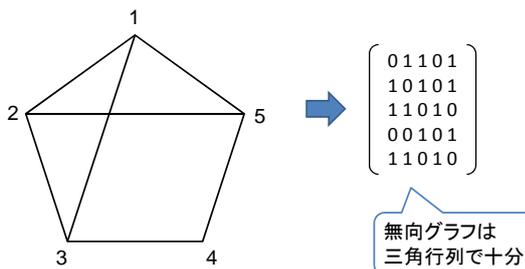
- 多引数を組にして1引数化する
- $\text{concat}(u, v)$
 - 組 (u, v) を引数にとる関数を考える
- $\text{concat}'(x)$
 - $x = (u, v)$ ならば $\text{concat}(u, v)$ を計算
 - それ以外ならば未定義

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

20

グラフのコード化

- 隣接行列を利用



ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

21

チューリング機械のコード化

- チューリング機械 $M = (Q, \delta, \Sigma, \Gamma)$
 - Q, Σ, Γ は有限集合
 - δ は有限集合から有限集合への関数
- 有限 \Rightarrow 列挙可能 \Rightarrow コード化可能
- $(Q, \delta, \Sigma, \Gamma)$ をどのようにコード化するか

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

22

 Q, Σ, Γ のコード化

- 状態は $0, 1, 2, \dots, n$ と名前が付いており n を終了状態とすれば Q は状態数 $(n+1)$ で決定できる
- Σ は $\{0, 1\}$
- 記号を $0, 1, 2, \dots, m$ (ただし 2 を B とみなす) とすれば Γ は記号数 $(m+1)$ で決定できる

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

23

 δ のコード化

- 遷移関数は有限集合から有限集合への関数
 - 状態 \times 記号 \rightarrow 状態 \times 記号 \times 移動方向
 - 対応付けは有限通り
- δ の引数の状態番号の小さい順、記号番号の小さい順に δ の値を並べる

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

24

δ のコード化の例

- M_{inc} の遷移関数

状態	記号	遷移関数値
0	0	(0, 0, R)
0	1	(0, 1, R)
0	B	(1, B, L)
1	0	(2, 1, L)
1	1	(1, 0, L)
1	B	(fin, 1, N)
2	0	(2, 0, L)
2	1	(2, 1, L)
2	B	(fin, B, R)

順に並べる
 (0,0,R), (0,1,R), (1,B,L),
 (2,1,L), (1,0,L), ...

ソフトウェアモデル論(2013/11/07) 25

例: M_{inc} のコード化

- 状態数 4
- {0, 1, 2, fin}
- 記号数 3
- {0, 1, B}
- 遷移関数
- (0,0,R), (0,1,R), (1,B,L), (2,1,L), ..., (fin,B,R)
- よって
(4, 3, (0,0,R), (0,1,R), (1,2,L), ..., (3,2,R))

ソフトウェアモデル論(2013/11/07) 26

コード化に伴うTMの変形例(その1)

ソフトウェアモデル論(2013/11/07) 27

コード化に伴うTMの変形例(その2)

ソフトウェアモデル論(2013/11/07) 28

テープ記号は 0, 1, B で十分

- すべてを2進数でコード化すればよい
- 0, 1 で表現できる
- テープは無限長なので B は必要
- 多引数関数の引数は列で表して1引数とする

ソフトウェアモデル論(2013/11/07) 29

合成関数の計算

- 合成関数 g◦f を計算するTM
- 関数 f を計算するTM M_f と g を計算するTM M_g から生成
- 直観的には、M_fの終了状態をM_gの初期状態とみなせばよい

ソフトウェアモデル論(2013/11/07) 30

修正: 定理2.3

- 61ページ、2行目
- $f \circ g \rightarrow g \circ f$
- $\delta_3(q, a) = (q_0', a, N)$ ← 内側の()は不要

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

31

分岐

- 述語 $p?$ と関数 f_1, f_2 に対して以下を計算

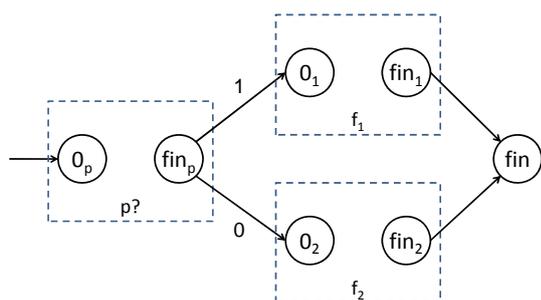
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{if } p?(x) = 1 \\ f_2(x) & \text{if } p?(x) = 0 \end{cases}$$

- $p?$ を計算した後、その結果を見て f_1 を計算する TM と f_2 を計算する TM のいずれの初期状態に遷移するか決める

ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

32

分岐



ソフトウェアモデル論(2013/11/07)

33