ソフトウェアモデル論（2013 年度）演習問題

桑原 寛明
情報理工学部 情報システム学科
kuwabara@cs.ritsumei.ac.jp

演習問題 1　有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ の受理言語はどのように定義されるか説明せよ．

演習問題 2　有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が以下のよう定義されるとする．

$$
\begin{aligned}
Q &: \{S_0, S_1, S_2\} \\
\Sigma &: \{0, 1\} \\
\delta &: (S_0, 0) \to S_0,\ (S_0, 1) \to S_1,\ (S_1, 0) \to S_1,\ (S_1, 1) \to S_2,\ (S_2, 0) \to S_0,\ (S_2, 1) \to S_1 \\
q_0 &: S_0 \\
F &: \{S_2\}
\end{aligned}
$$

1. M の遷移図を描け．
2. 以下の語の中で M が受理するものをすべて挙げよ．
   - 1111
   - 01110
   - 1101011
   - 00110011
   - 010101010
3. M の受理言語を正規表現で表せ．
4. M の受理言語を表す正規表現を講義資料 3.7 節の方法で求めよ．

演習問題 3　自分自身で適当な決定性有限オートマトン M を定義し，M について以下の問に答えよ．

1. M の遷移図を描け．
2. M が受理する語を 3 つ挙げよ．
3. M の受理言語を正規表現で表せ．

演習問題 4　$\Sigma = \{0, 1\}$ とする．以下の言語を正規表現で表し，受理する決定性有限オートマトンを作れ．

1. 11 で始まる語すべて
2. 11 で終わる語すべて
3. 11 で終わらない語すべて
4. 1 で始まり 1 で終わる語すべて
5. 3 つ並ぶ 1 を含む語すべて
6. 1 をただ一つだけ含む語すべて

7. 1 を少なくとも一つは含む語すべて

演習問題 5　非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が以下のように定義されるとする.

$$
\begin{aligned}
Q &: \{S_0, S_1, S_2\} \\
\Sigma &: \{0, 1\} \\
\delta &: (S_0, 0) \to \{S_1, S_2\},\ (S_0, 1) \to \{S_1\},\ (S_1, 0) \to \{S_2\},\ (S_1, 1) \to \{S_1, S_2\}, \\
&\quad (S_2, 0) \to \{S_2\},\ (S_2, 1) \to \{S_2\} \\
q_0 &: S_0 \\
F &: \{S_2\}
\end{aligned}
$$

1. M の遷移図を描け.
2. M の受理言語を正規表現で表せ.
3. M と受理言語が等しい決定性有限オートマトンを講義資料 3.4 節の方法で作れ.
4. M の受理言語を表す正規表現を講義資料 3.7 節の方法で求めよ.
5. M が受理しない語をすべて挙げよ.

演習問題 6　自分自身で適当な非決定性有限オートマトン M を定義し，M について以下の問に答えよ.

1. M の遷移図を描け.
2. M が受理する語を 3 つ挙げよ.
3. M と受理言語が等しい決定性有限オートマトンを作れ.
4. M の受理言語を正規表現で表せ.

演習問題 7　以下の $\Sigma = \{a, b\}$ 上の各言語を表す正規表現を与えよ.

1. 2 個以上並んだ a と 2 個以上並んだ b をともに含む語の集合
2. 2 個以上並んだ a と 2 個以上並んだ b のいずれも含まない語の集合
3. 右から 3 つ目の記号が b である語の集合
4. b を 3 個以上含まない語の集合
5. $\{a^i b^j \mid i + j$ が偶数 $\}$

演習問題 8　以下の正規表現によって受理言語が表される有限オートマトンを作れ.

1. $b^* a(a + b)^*$
2. $(a + ba)b^* a + bb$
3. $(b(b + ab)^* aa)^* a^*$
4. $((a + b)(a + b))^* + ((a + b)(a + b)(a + b))^*$

演習問題 9　以下の各言語 L を受理する有限オートマトンは存在しない，つまり各 L は正規言語ではないことを反復補題を用いて示せ．ここで，$\Sigma = \{a, b\}$ とする．また，x^R は x を逆順にした語を表す．例えば $(aab)^R = baa$ である.

1. $L = \{\boldsymbol{w} \in \Sigma^* \mid \boldsymbol{w}$ 中の a と b の個数が等しい $\}$
2. $L = \{\boldsymbol{w} \in \Sigma^* \mid \boldsymbol{w}$ 中の a の個数が b の個数より少ない $\}$
3. $L = \{x \mid x \in \Sigma^*, x = x^R\}$（ヒント：反復補題の定数 n に対して $a^n b a^n$ を考えよ.）

演習問題 10　チューリング機械 $M = (Q, \delta, \Sigma, \Gamma)$ が以下のように定義されるとする．

$$
\begin{aligned}
Q &: \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_{fin}\} \\
\delta &: (q_0, 0) \to (q_1, 0, R),\ (q_0, 1) \to (q_2, 1, R), \\
&\quad (q_1, 0) \to (q_1, 0, N),\ (q_1, 1) \to (q_1, 1, N),\ (q_1, B) \to (q_{fin}, B, L) \\
&\quad (q_2, 0) \to (q_2, 0, R),\ (q_2, 1) \to (q_2, 1, R),\ (q_2, B) \to (q_3, B, L) \\
&\quad (q_3, 0) \to (q_3, 1, L),\ (q_3, 1) \to (q_4, 0, L), \\
&\quad (q_4, 0) \to (q_4, 0, L),\ (q_4, 1) \to (q_4, 1, L),\ (q_4, B) \to (q_5, B, R) \\
&\quad (q_5, 0) \to (q_6, B, R),\ (q_5, 1) \to (q_{fin}, 1, N), \\
&\quad (q_6, 0) \to (q_6, B, R),\ (q_6, 1) \to (q_{fin}, 1, N),\ (q_6, B) \to (q_{fin}, 0, N) \\
\Sigma &: \{0, 1\} \\
\Gamma &: \{0, 1, B\}
\end{aligned}
$$

1. M の遷移図を描け．
2. 以下の各入力に対して計算列を示せ．停止しない場合は 4 ステップ目まで示せ．
   (a) 0
   (b) 1
   (c) 010
   (d) 100
   (e) 110
3. M がどのような関数を計算しているか述べよ．
4. 配付資料の例 2.10 の方法で M をコード化せよ．

演習問題 11　以下の問に答えよ．

1. 関数 f がチューリング機械計算可能であるとはどういうことか．
2. チャーチの提唱とは何か．
3. 万能チューリング機械とは何か．

演習問題 12　論理式集合 $\Phi = \{r \to (p \wedge q), r \vee \neg q\}$ について以下の問に答えよ．

1. Φ のモデルをすべて求めよ．
2. $\{p \to q, p \to (q \to r), r \wedge \neg p \to \neg r, (\neg p \wedge \neg q) \to r\}$ から Φ の論理的帰結である論理式をすべて選択せよ．
3. 2. で挙げた論理式それぞれについて，自然演繹によって Φ から導出せよ．

演習問題 13　自分自身で適当な論理式集合 Φ を定義し，以下の問に答えよ．

1. Φ のモデルをすべて求めよ．
2. 自分自身で適当な論理式 P を定義し，P が Φ の論理的帰結であるか判定せよ．論理的帰結ならば，自然演繹によって Φ から導出せよ．

演習問題 14　以下を自然演繹によって示せ．

1. $p \wedge q, r \wedge (s \wedge t) \vdash p \wedge s$

2. $p \wedge q, q \wedge r \vdash q$
3. $(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$
4. $p \to q \vdash (p \wedge \neg q) \to \neg p$
5. $q \to r \vdash (p \to r) \to (q \to r)$
6. $p \to (q \to r), q \vdash p \to (q \wedge r)$
7. $p \to (q \to r), \neg r \vdash p \to \neg(q \vee r)$
8. $p \to (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash \neg p$
9. $\vdash \neg p \vee (\neg q \vee p)$
10. $(p \wedge q) \to r, r \to s, p \wedge \neg s \vdash \neg q$

演習問題 15　以下の問に答えよ．

1. 自然演繹が健全であるとはどのような意味か．
2. 自然演繹が完全であるとはどのような意味か．

演習問題 16　以下の命題を CTL 式として記述せよ．

1. 命題 P が成り立つ可能性がある．
2. 命題 P が成り立つことは絶対にない．
3. 命題 P が成り立つことなく命題 Q が成り立つ可能性がある．
4. いつでも命題 P が成り立つ可能性がある．
5. 「命題 P が成り立つならば命題 Q は成り立つ」ことがすべての実行において常に成り立つ．
6. 命題 P が成り立たないならば次に必ず命題 Q は成り立たない．
7. いつでも命題 P はいつか必ず成り立つ．

演習問題 17　Kripke 構造 $M = (S, R, L)$ が以下のように定義されるとする．

$$
\begin{aligned}
&S : \{s_0, s_1, s_2, s_3\} \\
&R : R(s_0, s_1), R(s_0, s_3), R(s_1, s_1), R(s_1, s_2), R(s_2, s_0), R(s_3, s_0), R(s_3, s_2) \\
&L : L(s_0) = \{p, q\}, L(s_1) = \{r\}, L(s_2) = \{p\}, L(s_3) = \{q, r\}
\end{aligned}
$$

1. M の遷移図を描け．
2. s_0 を根とする高さ 4 の M の計算木を描け．
3. 以下の各 CTL 式 ϕ について $label_M(s_0)$ を求めて $M, s_0 \models \phi$ か否か判定せよ．
   (a) $\mathbf{AF}\, q$
   (b) $\mathbf{AG}\,\mathbf{EF}\,(p \vee r)$
   (c) $\mathbf{EX}\,\mathbf{EX}\, r$
   (d) $\mathbf{AG}\,\mathbf{AF}\, q$

演習問題 18　自分自身で適当な Kripke 構造 M を定義し，以下の問に答えよ．

1. M の遷移図を描け．
2. M の状態を 1 つ選び，その状態を根とする高さ 4 の計算木を描け．
3. 自分自身で適当な CTL 式 ϕ を定義し，M の状態 s を 1 つ選べ．$label_M(s)$ を求めて $M, s \models \phi$ か否か判定せよ．

演習問題 19　同期並行合成と非同期並行合成の違いを説明せよ．

演習問題 20　以下に示す 2 つのプロセス C および P からなる並行プログラムを考える．プロセス C と P は変数 `n` と `f` を共有しており，`n` の初期値は 0，`f` の初期値は `F` である．

プロセス C	プロセス P
`1: if (n == 0) goto 1;`	`1: if (n == 2) goto 1;`
`2: if (f == T) goto 1; else f = T;`	`2: if (f == T) goto 1; else f = T;`
`3: n = n - 1; f = F; goto 1;`	`3: n = n + 1; f = F; goto 1;`

1. プロセス C の状態遷移図を示せ．ただし，行番号，`n` の値，`f` の値の 3 項組を状態とせよ．`n` と `f` の値はその行を実行する直前の値とすること．
2. 1. と同様にして，プロセス P の状態遷移図を示せ．
3. プロセス C と P を非同期並行合成して得られる状態遷移図を示せ．ただし，C の行番号，P の行番号，`n` の値，`f` の値の 4 項組を状態とせよ．`n` と `f` の値はその行を実行する直前の値とすること．初期状態は $(1, 1, 0, F)$ であり，初期状態から到達不能な状態は省略してよい．
4. 命題変数 C_i，P_i，N_v，F_v はそれぞれ以下の命題を表すとする．

   C_i：プロセス C の i 行目を実行

   P_i：プロセス P の i 行目を実行

   N_v：変数 `n` の値が v

   F_v：変数 `f` の値が v

   これらの命題変数を利用して，3. で得られた状態遷移図の各状態 (c, p, n, f) に命題変数の集合 $\{C_c, P_p, N_n, F_f\}$ を割り当てる．すなわち，ラベル付け関数 L を $L((c, p, n, f)) = \{C_c, P_p, N_n, F_f\}$ と定義する．この L と 3. で得られた状態遷移から Kripke 構造 M を構成する．この時，以下のそれぞれについて成り立つか否か判定せよ．

   (a)　$M, (1, 1, 0, F) \models \mathbf{AG}\, \neg(C_3 \wedge P_3)$

   (b)　$M, (1, 1, 0, F) \models \mathbf{AF}\, P_3$

   (c)　$M, (1, 1, 0, F) \models \mathbf{AG}\, ((C_2 \wedge F_T) \to \mathbf{EF}\, (C_1 \vee C_3))$