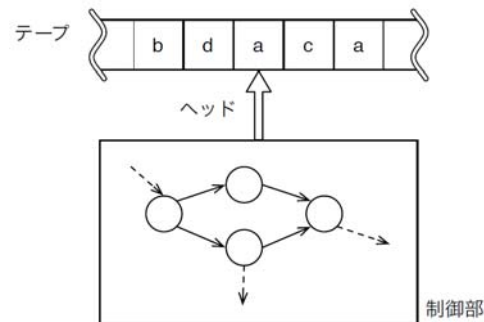


## ソフトウェアモデル論(2012年度) 第7回・2012/11/09

桑原 寛明  
情報理工学部 情報システム学科

### 概念図

(復習)



ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

2

### チューリング機械の動作

(復習)

1. ヘッドの位置のマスを読み
2. 読んだ記号に従って状態を遷移する
  - 終了状態へ到達したら終了
3. ヘッドの位置のマスに記号を書く
4. ヘッドの位置を
  - a. 1マス右へ移動する
  - b. 1マス左へ移動する
  - c. 移動しない
5. 1. へ戻る

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

3

### チューリング機械の定義

(復習)

$$M = (Q, \delta, \Sigma, \Gamma)$$

$Q$ : 状態の有限集合 ( $\neq \emptyset$ )

$q_0 \in Q$ : 初期状態

$q_{fin} \in Q$ : 終了状態

$\delta$ : 遷移関数

$$(Q - \{q_{fin}\} \times \Gamma) \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$$

$\Sigma$ : 入出力記号の有限集合

$\Gamma$ : テープ記号の有限集合

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

4

### チューリング機械の計算状況

(復習)

- 計算中のチューリング機械の様子は、制御部の状態、テープの内容、ヘッドの位置で決まる

$(q, \omega, \omega')$

- $q$ : 制御部の状態
- $\omega$ : ヘッドより左側のテープの内容
- $\omega'$ : ヘッドから右側のテープの内容 (ヘッド位置含む)

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

5

### チューリング機械の計算動作

(復習)

- 計算状況を遷移関数に従って変えること

- $q \in Q, u, v \in \Sigma^*, a, b \in \Sigma$  とすると

$$(q, ub, av) \vdash \begin{cases} (q', u, ba'v) & \text{if } \delta(q, a) = (q', a', L) \\ (q', uba', v) & \text{if } \delta(q, a) = (q', a', R) \\ (q', ub, a'v) & \text{if } \delta(q, a) = (q', a', N) \end{cases}$$

- $\vdash$  が1回の計算動作を表す

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

6

**例:  $M_{inc}$  (例2.1)の計算動作** (復習)

- 入力  $x$  が 101 の場合

$(0, B, 101B) \vdash (0, B1, 01B) \vdash (0, B10, 1B)$

$\vdash (0, B101, B) \vdash (1, B10, 1B) \vdash (1, B1, 00B)$

$\vdash (2, B, 110B) \vdash (2, B, B110B) \vdash (fin, B, 110B)$

ソフトウェアモデル論(2012/11/09) 7

**チューリング機械の計算** (復習)

- 入力  $x$  に対するチューリング機械の計算
  - $x$  に対する初期状況から計算動作を繰り返す過程の総称
- 計算列
  - 計算動作に伴って変化する計算状況の列
- 計算の正常終了
  - 正常終了状況に到達

ソフトウェアモデル論(2012/11/09) 8

**関数を計算するチューリング機械** (復習)

- 関数  $f$  を計算するチューリング機械  $M$ 
  - $f$  は  $\Sigma^*$  上の1変数(1引数)関数
- $x \in \text{dom}(f)$  ならば  $M$  に  $x$  を入力して実行すると  $f(x)$  を出力して正常終了
- $x \notin \text{dom}(f)$  ならば  $M$  に  $x$  を入力して実行すると正常終了しない
- 結果を  $M(x)$  と書く(出力以外に終了状況を含む)

ソフトウェアモデル論(2012/11/09) 9

**例:  $inc(x)$**

- 正確には

$$inc(x) = \begin{cases} n+1 \text{ の 2 進数表記} & \text{if } x \text{ がある } n \in \mathbb{N} \text{ の 2 進数表記} \\ \text{未定義} & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $x$  が正しい2進数でなければ未定義
  - 正しくない(定義域に含まれない)入力の場合は正常終了しない
  - 正しい2進数
    - 値が0でなければ最上位桁は1

ソフトウェアモデル論(2012/11/09) 10

**例:  $inc(x)$  を計算する TM  $M'_{inc}$**

$M'_{inc} = (\{0, 1, fin, 0', 1', 2'\}, \delta, \{0, 1\}, \{0, 1, B\})$

$a = 0 \text{ or } 1$

ソフトウェアモデル論(2012/11/09) 11

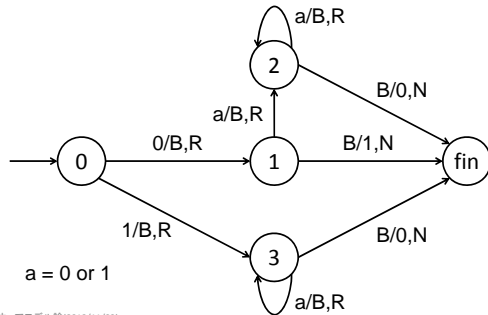
**述語**

- すべての  $x \in \Sigma^*$  に対して 0 または 1 を返す関数
  - 1 ならば真
  - 0 ならば偽
- 述語の定義域は  $\Sigma^*$  全体なので、対応するTMは任意の入力に対して正常終了しなければならない
  - 終了状況が  $(q_{fin}, B, 1B)$  または  $(q_{fin}, B, 0B)$

ソフトウェアモデル論(2012/11/09) 12

## 例: is\_valid\_binary\_num(x)

- x が正しい2進数ならば真



ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

13

## 修正: 図2.7

- $\delta(1, B) = (\text{fin}, 0, N)$

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

14

## 多変数(多引数)関数の計算

- 引数の区切りを表す特殊な記号(資料では#)を利用して1変数関数として計算する
- 初期状況  $(q_0, B, x_1 \# x_2 B)$

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

15

## データのコード化

- 入出力記号の集合  $\Sigma$  を  $\{0, 1\}$  に制限する
- 制限しても困ることはない
  - すべてを2進数で表せばよい

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

16

## 自然数のコード化

- 例えば2進数
  - 0を除いて先頭が0でない2進数で表す
- $0_{10} = 0_2$
- $5_{10} = 101_2$
- $15_{10} = 1111_2$

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

17

## 英文字、数字、記号のコード化

- 例えばASCII
  - 8ビットで1記号
- A  $\rightarrow$  01000001
- 1  $\rightarrow$  00110001
- ( $\rightarrow$ ) 00101000

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

18

## データの組や列のコード化

- (2, AC) や (1, 0, 0, 123) など
- 英文字、数字、カンマや括弧などの記号をすべてASCII化して並べる
- (2,AC)  $\rightarrow$  00101000 00110010 00101100 ...
- (1,0,0,123)  $\rightarrow$  00101000 00110001 00101100 ...

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

19

## 2引数関数の1引数化

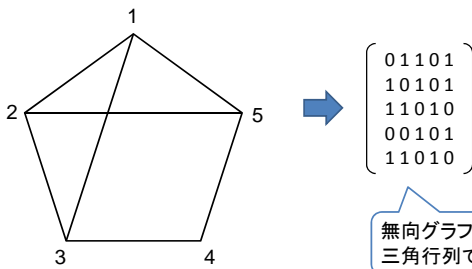
- 多引数を組にして1引数化する
- $\text{concat}(u, v)$ 
  - 組  $(u, v)$  を引数にとる関数を考える
- $\text{concat}'(x)$ 
  - $x = (u, v)$  ならば  $\text{concat}(u, v)$  を計算
  - それ以外ならば未定義

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

20

## グラフのコード化

- 隣接行列を利用



ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

21

## チューリング機械のコード化

- チューリング機械  $M = (Q, \delta, \Sigma, \Gamma)$ 
  - $Q, \Sigma, \Gamma$  は有限集合
  - $\delta$  は有限集合から有限集合への関数
- 有限  $\Rightarrow$  列挙可能  $\Rightarrow$  コード化可能
- $(Q, \delta, \Sigma, \Gamma)$  をどのようにコード化するか

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

22

 $Q, \Sigma, \Gamma$  のコード化

- 状態は  $0, 1, 2, \dots, n$  と名前が付いており  $n$  を終了状態とすれば  $Q$  は状態数  $(n+1)$  で決定できる
- $\Sigma$  は  $\{0, 1\}$
- 記号を  $0, 1, 2, \dots, m$  (ただし  $2$  を  $B$  とみなす) とすれば  $\Gamma$  は記号数  $(m+1)$  で決定できる

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

23

 $\delta$  のコード化

- 遷移関数は有限集合から有限集合への関数
  - 状態  $\times$  記号  $\rightarrow$  状態  $\times$  記号  $\times$  移動方向
  - 対応付けは有限通り
- $\delta$  の引数の状態番号の小さい順、記号番号の小さい順に  $\delta$  の値を並べる

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

24

δ のコード化の例

- $M_{inc}$  の遷移関数

状態	記号	遷移関数値
0	0	(0, 0, R)
0	1	(0, 1, R)
0	B	(1, B, L)
1	0	(2, 1, L)
1	1	(1, 0, L)
1	B	(fin, 1, N)
2	0	(2, 0, L)
2	1	(2, 1, L)
2	B	(fin, B, R)

順に並べる  
 (0,0,R), (0,1,R), (1,B,L),  
 (2,1,L), (1,0,L), ...

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

25

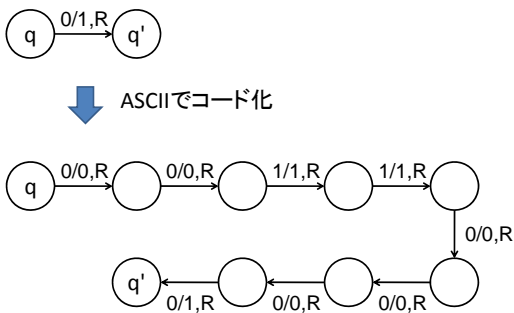
例:  $M_{inc}$  のコード化

- 状態数 4  
 - {0, 1, 2, fin}
- 記号数 3  
 - {0, 1, B}
- 遷移関数  
 - (0,0,R), (0,1,R), (1,B,L), (2,1,L), ..., (fin,B,R)
- よって  
 (4, 3, (0,0,R), (0,1,R), (1,2,L), ..., (3,2,R))

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

26

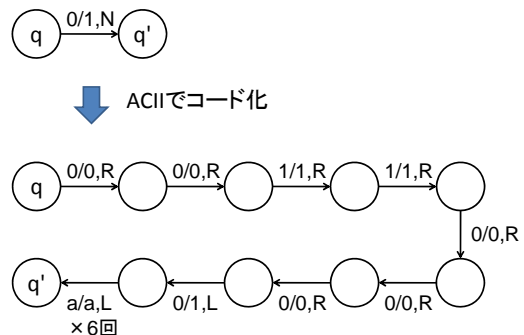
コード化に伴うTMの変形例(その1)



ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

27

コード化に伴うTMの変形例(その2)



ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

28

テープ記号は 0, 1, B で十分

- すべてを2進数でコード化すればよい  
 - 0, 1 で表現できる
- テープは無限長なので B は必要
- 多引数関数の引数は列で表して1引数とする

ソフトウェアモデル論(2012/11/09)

29