

ソフトウェアモデル論(2012年度)  
第2回・2012/10/05

桑原 寛明  
情報理工学部 情報システム学科

**集合** (復習)

- 「もの」(要素)の集まり
  - 同じ要素は高々1つ
- 部分集合、べき集合
- 集合上の演算
  - 和、積、差、補集合
- 直積
  - 順序対

ソフトウェアモデル論(2012/10/05) 2

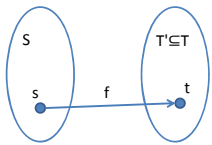
**関係** (復習)

- 「もの」と「もの」の関係
- 直積の部分集合
  - 関係のある「もの」の組合せを全部集める
- 反射、対称、反対称、推移
- 順序関係、同値関係
- 反射推移閉包

ソフトウェアモデル論(2012/10/05) 3

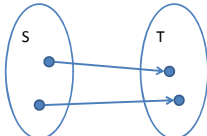
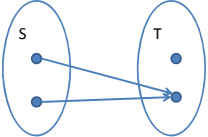
**関数(写像)** (復習)

- 集合  $S$  の各要素に集合  $T$  の要素を1つだけ対応付ける
  - $f: S \rightarrow T$
  - $f(s) = t$
- 定義域
  - 対応付けの元の集合
- 値域
  - 対応付けの先の集合



ソフトウェアモデル論(2012/10/05) 4

**関数(写像)** (復習)

- 単射
  - 同じ要素に対応付けない
- 全射
  - 全要素が値域に含まれる
- 全単射
  - 単射かつ全射

ソフトウェアモデル論(2012/10/05) 5

有限オートマトンと正規表現

ソフトウェアモデル論(2012/10/05) 6

順序機械

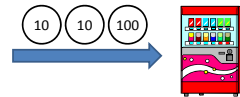
- ある入力を与えると、内部で何かを行って、何かを出力する機械
  - 次の出力は、今までの入力と次の入力によって決定される
- 今までの入力によって機械の内部状態が決定される
  - 入力による内部状態の変化が状態遷移

ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

7

例(自動販売機)

- 120円のジュースを買いたい
  - 100円、10円、10円の順に硬貨を投入する
  - 10円、10円、100円の順に硬貨を投入する
- 自動販売機は硬貨がいくら投入されたか記憶しなければならない
- 120円投入されたらジュースのランプを点灯する

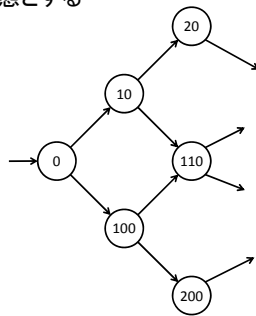


ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

8

例(自動販売機)

投入された金額を状態とする  
状態遷移図

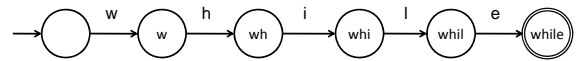


ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

9

その他の例

- 順序回路
- コンパイラの字句解析・構文解析

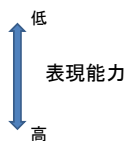


ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

10

オートマトン

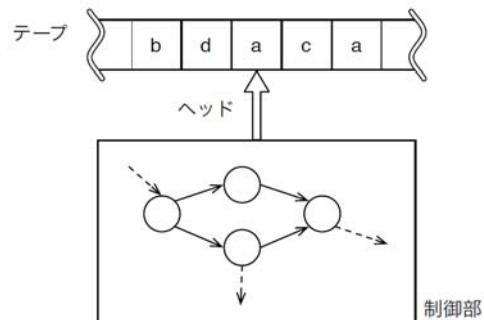
- 順序機械を一般的に記述するモデル
- 計算機が実行する「計算」を抽象的に表現するモデル
  - 有限オートマトン
  - プッシュダウンオートマトン
  - 線形有界(拘束)オートマトン
  - チューリング機械



ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

11

オートマトンの概念図



ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

12

## 有限オートマトン

- 以下の制限を加えたオートマトン
  - 読み出しのみ
  - 1マス読んだら必ずヘッドを右へ1マス移動
  - 左端のマスから開始

ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

13

## 有限オートマトンの動作

1. ヘッドの位置のマスを読む
2. 読んだ記号に従って状態遷移する
3. ヘッドを1マス右へ移動する
4. テープ上のすべての記号を読んで状態遷移が終わった時に、状態が最終状態になっていれば入力された記号列を受理する

ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

14

## 決定性有限オートマトン (DFA)

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$Q$  : 状態の有限集合 ( $\neq \emptyset$ )

$\Sigma$  : 入力記号の有限集合

$\delta$  : 状態遷移関数 ( $Q \times \Sigma \rightarrow Q$ )

$q_0$  : 初期状態 ( $\in Q$ )

$F$  : 受理状態の集合 ( $\subseteq Q$ )

ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

15

## DFAの例

- ab の繰返しを受理するDFA

$$Q : \{S_0, S_1, S_2\}$$

$$\Sigma : \{a, b\}$$

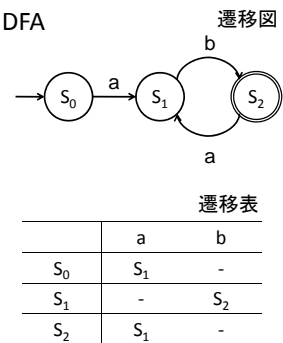
$$\delta : (S_0, a) \rightarrow S_1,$$

$$(S_1, b) \rightarrow S_2,$$

$$(S_2, a) \rightarrow S_1$$

$$q_0 : S_0$$

$$F : \{S_2\}$$



ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

16

## 主要な概念

- アルファベット
  - 記号の有限集合
- 語
  - 記号列
- アルファベットから作られる語の集合
  - $\Sigma = \{0, 1\}$  ならば
  - $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$
- $\Sigma$ 上の言語L
  - $L \subseteq \Sigma^*$

ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

17

## 遷移関数の拡張

- 状態と語を受け取って状態を返すように拡張

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$$

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$$

$$\hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a)$$

ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

18

### 受理言語

- $\delta(q_0, w) \in F$ ならば語 $w$ は受理される  
- 開始状態から開始して受理状態で終了
- オートマトン $M$ の受理言語  
 $L(M) = \{w \mid w \in \Sigma^* \wedge \delta(q_0, w) \in F\}$   
- 受理される語の集合
- $L(M_1) = L(M_2)$ の時 $M_1$ と $M_2$ は等しい  
- オートマトンが等しいとは受理言語が等しいこと

ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

19

### 非決定性有限オートマトン (NFA)

- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- $Q$ : 状態の有限集合 ( $\neq \emptyset$ )
  - $\Sigma$ : 入力記号の有限集合
  - $\delta$ : 状態遷移関数 ( $Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ )
  - $q_0$ : 初期状態 ( $\in Q$ )
  - $F$ : 受理状態の集合 ( $\subseteq Q$ )

ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

20

### NFAにおける語の受理

- NFAでは遷移先が2つ以上の場合がある  
- e.g.  $\delta(q, a) = \{q', q''\}$
- 入力された語に対して遷移列も複数ある
- 受理状態で終了する遷移列が1つでもあれば受理する

ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

21

### NFAの例

- $a$ の1回以上の繰返しを受理するNFA

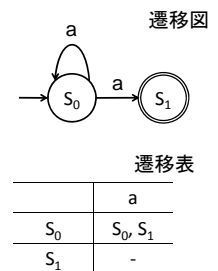
$Q : \{S_0, S_1\}$

$\Sigma : \{a\}$

$\delta : (S_0, a) \rightarrow \{S_0, S_1\}$

$q_0 : S_0$

$F : \{S_1\}$



ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

22

### DFAとNFAの等価性

- DFAはNFAの特殊な場合である  
- DFAは遷移先が一意に決められるNFA
- NFAをシミュレートするDFAを作ることができる  
- 受理言語が同じ
- 受理言語が同じであればNFAの方が作りやすいことが多い

ソフトウェアモデル論(2012/10/05)

23