

## ソフトウェアモデル論(2012年度) 第1回・2012/09/28

桑原 寛明  
情報理工学部 情報システム学科

### ソフトウェアモデル論

- ソフトウェア
  - 計算機にどのような計算を行うのか指示するもの
  - 翻って、計算機が行う計算を表現するもの
- モデル
  - 対象から本質を抽出してまとめたもの
- そもそも、「計算」とは何か？

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

2

### 歴史 (1/2)

- 電子計算機の出現は1940年代半ば頃
  - ENIAC など
  - その後数年程度でプログラム内蔵方式が出現



ENIAC  
(出典: Wikimedia project)

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

3

### 歴史 (2/2)

- 電子計算機の出現以前に、数学者が「関数を計算するとはどういうことか」研究していた
  - 正確には、「計算できる関数とは何か」

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

4

### チャーチの提唱

- 「計算できる関数」とは
  - 帰納的関数
  - $\lambda$ 計算
  - チューリング機械
 } 能力は同じ  
 で計算できる関数ということにしよう
- この過程で、「計算する」とはどういうことか数学的に記述された
  - 特にチューリング機械で顕著

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

5

### 本講義のトピックス

- 有限オートマトンと正規表現
- チューリング機械
- 命題論理
- モデル検査

計算機科学の  
理論的な土台

オートマトンと論理の  
直接的な応用

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

6

## ソフトウェアモデル論

ソフトウェアによって表現される

計算機が実行する計算の

形式モデルの基礎と応用を論ずる

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

7

## 数学的準備

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

8

## 集合

- 互いに区別できる「もの」の集まり
  - 「もの」を元とか要素と呼ぶ
  - 同じ要素は高々1つ
- $\{a, b, c\}, \{a, b, \dots\}, \{x \mid \text{条件}\}$
- $x \in S$ 
  - $x$  は集合  $S$  の要素
- 持っている要素が同じであれば等しい集合

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

9

## 空集合

- 要素を1つも持たない集合
- $\phi, \{\}$  などと書く

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

10

## 部分集合

- ある集合の一部の要素からなる集合
  - $\{a, b, c\}$  に対して  $\{a\}, \{a, c\}$  など
  - 空集合も部分集合
- $T \subseteq S$ 
  - 集合  $T$  は集合  $S$  の部分集合
  - $T = S$  でもよい
- $T \subset S$ 
  - 集合  $T$  は集合  $S$  の真部分集合
  - $T = S$  ではない

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

11

## べき集合

- ある集合のすべての部分集合からなる集合
  - $\{a, b, c\}$  に対して  
 $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $2^S$ 
  - 集合  $S$  のべき集合

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

12

## 演算

- 和集合
  - 2つの集合の要素をすべて集めた集合
- 積集合
  - 2つの集合の両方に含まれる要素を集めた集合

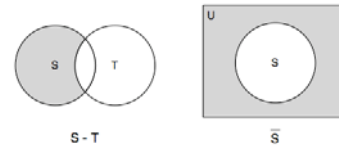


ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

13

## 演算

- 差集合
  - 一方の集合から他方の集合に含まれる要素を除いた集合
- 補集合
  - ある集合に含まれない要素からなる集合



ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

14

## 直積

- 順序対
  - $(s, t)$
  - 集合  $S$  の要素  $s$  と、集合  $T$  の要素  $t$  の組
    - ただし、順序付き
    - $(s, t)$  と  $(t, s)$  は異なる
- 順序対の集合が直積
  - $S \times T$
- $\{a, b\} \times \{1, 2\} = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2)\}$

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

15

## 関係

- 「もの」と「もの」の間に何らかの関係がある
  - 「関係」を一般的に書くには？
- 「関係」がある「もの」と「もの」の組み合わせを列挙すればよい
  - 組み合わせは順序対
- 関係は直積の部分集合

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

16

## 例えば、数の大小関係

- $S = \{1, 2, 3\}$  上の大小関係  $<$ 
  - $S \times S$  の部分集合
- $1 < 2, 1 < 3, 2 < 3$  なので
  - $< = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

17

## 反射性

- 任意の  $s \in S$  に対して  $sRs$ 
  - $R$  は  $S$  上の関係
- 例えば  $\{(a,a), (b,b)\}$

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

18

### 対称性

- $xRy$  ならば  $yRx$   
–  $R$  は  $S$  上の関係で  $x, y \in S$
- 例えば  $\{(a,b), (b,a), (c,c)\}$

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

19

### 反対称性

- $xRy$  かつ  $yRx$  ならば  $x = y$   
–  $R$  は  $S$  上の関係で  $x, y \in S$
- 例えば  $\{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c)\}$

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

20

### 推移性

- $xRy$  かつ  $yRz$  ならば  $xRz$   
–  $R$  は  $S$  上の関係で  $x, y, z \in S$
- 例えば  $\{(a,b), (a,c), (b,c)\}$

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

21

### 順序関係

- 反射的かつ反対称的かつ推移的な関係
- 全順序関係  
– 集合  $S$  上の順序関係  $R$   
–  $S$  の任意の2つの要素間に  $R$  または  $R^{-1}$  が成立

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

22

### 同値関係

- 反射的かつ対称的かつ推移的な関係

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

23

### 関係の合成

- 2つの関係を順に到達できる関係  
–  $R_1 \subseteq S \times T, R_2 \subseteq T \times U$   
–  $R_1 \circ R_2 = \{(s,u) \mid \exists t \in T. sR_1t \text{ かつ } tR_2u\}$
- $\{(1,a)\}$  と  $\{(a,A)\}$  を合成すると  $\{(1,A)\}$

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

24

### 反射推移閉包

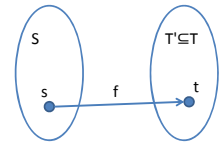
- 集合  $S$  上の関係  $R$  の反射推移閉包
  - $R$  を0回以上たどって到達できる要素間の関係
- $S = \{a, b, c\}$ ,  $R = \{(a,b), (b,c)\}$  とすると  
 $R^* = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c)\}$

ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

25

### 関数(写像)

- 集合  $S$  の各要素に集合  $T$  の要素を対応付ける
  - $f: S \rightarrow T$
  - $f(s) = t$
- 定義域
  - 対応付けの元の集合
- 値域
  - 対応付けの先の集合

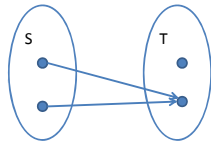
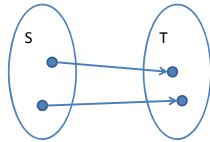


ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

26

### 関数(写像)

- 単射
  - 同じ要素に対応付けない
- 全射
  - 全要素が値域に含まれる
- 全単射
  - 単射かつ全射

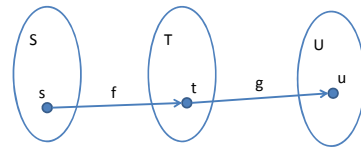


ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

27

### 関数の合成

- $f: S \rightarrow T$  と  $g: T \rightarrow U$  を合成
  - $h = g \circ f: S \rightarrow U$



ソフトウェアモデル論(2012/09/28)

28