

ソフトウェアモデル論 (2012 年度) 演習問題

桑原 寛明

情報理工学部 情報システム学科

kuwabara@cs.ritsumei.ac.jp

演習問題 1 有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ の受理言語はどのように定義されるか説明せよ.

演習問題 2 有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が以下のように定義されるとする.

$$Q : \{S_0, S_1, S_2\}$$

$$\Sigma : \{0, 1\}$$

$$\delta : (S_0, 0) \rightarrow S_0, (S_0, 1) \rightarrow S_1, (S_1, 0) \rightarrow S_1, (S_1, 1) \rightarrow S_2, (S_2, 0) \rightarrow S_0, (S_2, 1) \rightarrow S_1$$

$$q_0 : S_0$$

$$F : \{S_2\}$$

1. M の遷移図を描け.
2. 以下の語の中で M が受理するものをすべて挙げよ.
 - 1111
 - 01110
 - 1101011
 - 00110011
 - 010101010
3. M の受理言語を正規表現で表せ.
4. M の受理言語を表す正規表現を講義資料 3.7 節の方法で求めよ.

演習問題 3 $\Sigma = \{0, 1\}$ とする. 以下の言語を正規表現で表し, 受理する決定性有限オートマトンを作れ.

1. 11 で始まる語すべて
2. 11 で終わる語すべて
3. 11 で終わらない語すべて
4. 1 で始まり 1 で終わる語すべて
5. 3 つ並ぶ 1 を含む語すべて
6. 1 をただ一つだけ含む語すべて
7. 1 を少なくとも一つは含む語すべて

演習問題 4 非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が以下のように定義されるとする.

$$Q : \{S_0, S_1, S_2\}$$

$$\Sigma : \{0, 1\}$$

$$\delta : (S_0, 0) \rightarrow \{S_1, S_2\}, (S_0, 1) \rightarrow \{S_1\}, (S_1, 0) \rightarrow \{S_2\}, (S_1, 1) \rightarrow \{S_1, S_2\}, \\ (S_2, 0) \rightarrow \{S_2\}, (S_2, 1) \rightarrow \{S_2\}$$

$$q_0 : S_0$$

$$F : \{S_2\}$$

1. M の遷移図を描け.
2. M の受理言語を正規表現で表せ.
3. M と受理言語が等しい決定性有限オートマトンを講義資料 3.4 節の方法で作れ.
4. M の受理言語を表す正規表現を講義資料 3.7 節の方法で求めよ.
5. M が受理しない語をすべて挙げよ.

演習問題 5 $\Sigma = \{a, b\}$ 上の以下の言語を表す正規表現を与えよ.

1. 2 個以上並んだ a と 2 個以上並んだ b をともに含む語の集合
2. 2 個以上並んだ a と 2 個以上並んだ b のいずれも含まない語の集合
3. 右から 3 つ目の記号が b である語の集合
4. b を 3 個以上含まない語の集合
5. $\{a^i b^j \mid i + j \text{ が偶数}\}$

演習問題 6 以下の正規表現によって受理言語が表される有限オートマトンを作れ.

1. $b^* a (a + b)^*$
2. $(a + ba) b^* a + bb$
3. $(b(b + ab)^* aa)^* a^*$
4. $((a + b)(a + b))^* + ((a + b)(a + b)(a + b))^*$

演習問題 7 以下の各言語 L を受理する有限オートマトンは存在しない, つまり各 L は正規言語ではないことを反復補題を用いて示せ. ここで, $\Sigma = \{a, b\}$ とする. また, x^R は x を逆順にした語を表す. 例えば $(aab)^R = baa$ である.

1. $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ 中の } a \text{ と } b \text{ の個数が等しい}\}$
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ 中の } a \text{ の個数が } b \text{ の個数より少ない}\}$
3. $L = \{x \mid x \in \Sigma^*, x = x^R\}$ (ヒント: 反復補題の定数 n に対して $a^n b a^n$ を考えよ.)

演習問題 8 チューリング機械 $M = (Q, \delta, \Sigma, \Gamma)$ が以下のように定義されるとする。

$$\begin{aligned}
 Q &: \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_{fin}\} \\
 \delta &: (q_0, 0) \rightarrow (q_1, 0, R), (q_0, 1) \rightarrow (q_2, 1, R), \\
 & (q_1, 0) \rightarrow (q_1, 0, N), (q_1, 1) \rightarrow (q_1, 1, N), (q_1, B) \rightarrow (q_{fin}, B, L) \\
 & (q_2, 0) \rightarrow (q_2, 0, R), (q_2, 1) \rightarrow (q_2, 1, R), (q_2, B) \rightarrow (q_3, B, L) \\
 & (q_3, 0) \rightarrow (q_3, 1, L), (q_3, 1) \rightarrow (q_4, 0, L), \\
 & (q_4, 0) \rightarrow (q_4, 0, L), (q_4, 1) \rightarrow (q_4, 1, L), (q_4, B) \rightarrow (q_5, B, R) \\
 & (q_5, 0) \rightarrow (q_6, B, R), (q_5, 1) \rightarrow (q_{fin}, 1, N), \\
 & (q_6, 0) \rightarrow (q_6, B, R), (q_6, 1) \rightarrow (q_{fin}, 1, N), (q_6, B) \rightarrow (q_{fin}, 0, N) \\
 \Sigma &: \{0, 1\} \\
 \Gamma &: \{0, 1, B\}
 \end{aligned}$$

1. M の遷移図を描け。
2. 以下の各入力に対して計算列を示せ。停止しない場合は 4 ステップ目まで示せ。
 - (a) 0
 - (b) 1
 - (c) 010
 - (d) 100
 - (e) 110
3. M がどのような関数を計算しているか述べよ。
4. 配付資料の例 2.10 の方法で M をコード化せよ。

演習問題 9 以下の問に答えよ。

1. 関数 f がチューリング機械計算可能であるとはどういうことか。
2. チャーチの提唱とは何か。
3. 万能チューリング機械とは何か。

演習問題 10 論理式集合 $\Phi = \{r \rightarrow (p \wedge q), r \vee \neg q\}$ について以下の問に答えよ。

1. Φ のモデルをすべて求めよ。
2. $\{p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), r \wedge \neg p \rightarrow \neg r, (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r\}$ から Φ の論理的帰結である論理式をすべて選択せよ。
3. 2. で挙げた論理式それぞれについて、自然演繹によって Φ から導出せよ。

演習問題 11 以下を自然演繹によって示せ。

1. $p \wedge q, r \wedge (s \wedge t) \vdash p \wedge s$
2. $p \wedge q, q \wedge r \vdash q$
3. $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$
4. $p \rightarrow q \vdash (p \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
5. $q \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)$
6. $p \rightarrow (q \rightarrow r), q \vdash p \rightarrow (q \wedge r)$

7. $p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r \vdash p \rightarrow \neg(q \vee r)$
8. $p \rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash \neg p$
9. $\vdash \neg p \vee (\neg q \vee p)$
10. $(p \wedge q) \rightarrow r, r \rightarrow s, p \wedge \neg s \vdash \neg q$

演習問題 12 以下の問に答えよ.

1. 自然演繹が健全であるとはどのような意味か.
2. 自然演繹が完全であるとはどのような意味か.

演習問題 13 以下の命題を CTL 式として記述せよ.

1. 命題 P が成り立つ可能性がある.
2. 命題 P が成り立つことは絶対でない.
3. 命題 P が成り立つことなく命題 Q が成り立つ可能性がある.
4. いつでも命題 P が成り立つ可能性がある.
5. 「命題 P が成り立つならば命題 Q は成り立つ」ことがすべての実行において常に成り立つ.
6. 命題 P が成り立たないならば次に必ず命題 Q は成り立たない.
7. いつでも命題 P はいつか必ず成り立つ.

演習問題 14 Kripke 構造 $M = (S, R, L)$ が以下のように定義されるとする.

$$\begin{aligned}
 S &: \{s_0, s_1, s_2, s_3\} \\
 R &: R(s_0, s_1), R(s_0, s_3), R(s_1, s_1), R(s_1, s_2), R(s_2, s_0), R(s_3, s_0), R(s_3, s_2) \\
 L &: L(s_0) = \{p, q\}, L(s_1) = \{r\}, L(s_2) = \{p\}, L(s_3) = \{q, r\}
 \end{aligned}$$

1. M の遷移図を描け.
2. s_0 を根とする高さ 4 の M の計算木を描け.
3. 以下の各 CTL 式 ϕ について $label_M(s_0)$ を求めて $M, s_0 \models \phi$ か否かを判定せよ.
 - (a) $\mathbf{AF} q$
 - (b) $\mathbf{AG EF} (p \vee r)$
 - (c) $\mathbf{EX EX} r$
 - (d) $\mathbf{AG AF} q$

演習問題 15 同期並行合成と非同期並行合成の違いを説明せよ.

演習問題 16 以下に示す 2 つのプロセス C および P からなる並行プログラムを考える. プロセス C と P は変数 n と f を共有しており, n の初期値は 0, f の初期値は F である.

プロセス C	プロセス P
1: if ($n == 0$) goto 1;	1: if ($n == 2$) goto 1;
2: if ($f == T$) goto 1; else $f = T$;	2: if ($f == T$) goto 1; else $f = T$;
3: $n = n - 1$; $f = F$; goto 1;	3: $n = n + 1$; $f = F$; goto 1;

1. プロセス C の状態遷移図を示せ. ただし, 行番号, n の値, f の値の 3 項組を状態とせよ. n と f の値はその行を実行する直前の値とすること.
2. 1. と同様にして, プロセス P の状態遷移図を示せ.
3. プロセス C と P を非同期並行合成して得られる状態遷移図を示せ. ただし, C の行番号, P の行番号, n の値, f の値の 4 項組を状態とせよ. n と f の値はその行を実行する直前の値とすること. 初期状態は $(1, 1, 0, F)$ であり, 初期状態から到達不能な状態は省略してよい.
4. 命題変数 C_i, P_i, N_v, F_v はそれぞれ以下の命題を表すとする.

C_i : プロセス C の i 行目を実行

P_i : プロセス P の i 行目を実行

N_v : 変数 n の値が v

F_v : 変数 f の値が v

これらの命題変数を利用して, 3. で得られた状態遷移図の各状態 (c, p, n, f) に命題変数の集合 $\{C_c, P_p, N_n, F_f\}$ を割り当てる. すなわち, ラベル付け関数 L を $L((c, p, n, f)) = \{C_c, P_p, N_n, F_f\}$ と定義する. この L と 3. で得られた状態遷移から Kripke 構造 M を構成する. この時, 以下のそれぞれについて成り立つか否か判定せよ.

- (a) $M, (1, 1, 0, F) \models \mathbf{AG} \neg(C_3 \wedge P_3)$
- (b) $M, (1, 1, 0, F) \models \mathbf{AF} P_3$
- (c) $M, (1, 1, 0, F) \models \mathbf{AG} ((C_2 \wedge F_T) \rightarrow \mathbf{EF} (C_1 \vee C_3))$