ソフトウェアモデル論（2011年度）
第4回・2011/10/21

桑原 寛明
情報理工学部 情報システム学科

NFAをシミュレートするDFAの作り方　（復習）

- NFA： $M_N=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0^N, F_N)$
- DFA： $M_D=(Q_D, \Sigma, \delta_D, q_0^D, F_D)$

- M_Dの状態集合はM_Nの状態集合のべき集合
  – $Q_D = 2^{QN}$
- M_NとM_Dの記号の集合は同じ
- M_Dの初期状態はM_Nの初期状態のみからなる状態
  – $q_0^D = \{ q_0^N \}$

NFAをシミュレートするDFAの作り方　（復習）

- M_Dの最終状態はM_Nの最終状態を1つでも含む状態すべて
  – $F_D = \{ q_D \mid q_D \in Q_D$ かつ $q_D \cap F_N \neq \emptyset \}$

- M_Dの各状態の遷移先は、その状態が含むM_Nの状態の遷移先すべてを含むM_Dの状態
  – $\delta_D(\{q_1^N,\ldots,q_i^N\}, a) = \delta_N(q_1^N,a) \cup \ldots \cup \delta_N(q_i^N,a)$

NFAをシミュレートするDFAの例　（復習）

NFA

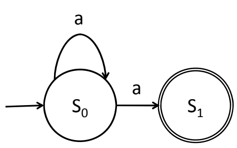
$Q : \{S_0, S_1\}$
$\Sigma : \{a\}$
$\delta : (S_0, a) \to \{S_0, S_1\}$
$q_0 : S_0$
$F : \{S_1\}$

⇒ DFA

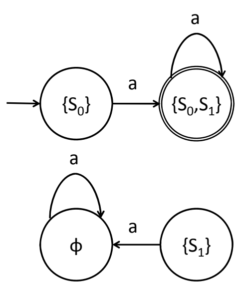
$Q : \{\emptyset, \{S_0\}, \{S_1\}, \{S_0, S_1\}\}$
$\Sigma : \{a\}$
$\delta : (\emptyset, a) \to \emptyset$
$(\{S_0\}, a) \to \{S_0, S_1\}$
$(\{S_1\}, a) \to \emptyset$
$(\{S_0, S_1\}, a) \to \{S_0, S_1\}$
$q_0 : \{S_0\}$
$F : \{\{S_1\}, \{S_0, S_1\}\}$

NFAをシミュレートするDFAの例　（復習）

NFA



⇒ DFA



正規表現 (RE)　（復習）

アルファベットΣ上の正規表現

1. 空列ε、空集合∅、記号 a∈Σ は正規表現
2. P, Qが正規表現ならば
   – (P + Q)　選択
   – (P • Q)　連接（通常は • を省略する）
   – (P*)　繰返し

   は正規表現
3. 1.と2. を有限回適用して生成されるものだけが正規表現

正規表現が表す語の集合 （復習）

1. 正規表現 ε は集合 {ε} を表す
2. 正規表現 ∅ は空集合 ∅ を表す
3. 正規表現 a は集合 {a} を表す
4. 正規表現 P, Q が表す語の集合をそれぞれ ***P***, ***Q*** とすると
   - (P + Q) は { w | w∈***P*** ∨ w∈***Q*** } = ***P*** ∪ ***Q***
   - (P • Q) は { v • w | v∈***P*** ∧ w∈***Q*** } = ***P*** • ***Q***
   - (P*) は {ε} ∪ ***P*** ∪ ***P•P*** ∪ ...

   を表す

正規表現と語の集合の例（Σ={a,b}） （復習）

- 正規表現
  - a+b
  - aabb
  - a(a+b)b
  - a*
  - ab*a
  - a(a+b)*b
- 語の集合
  - { a, b }
  - { aabb }
  - { aab, abb }
  - { ε, a, aa, aaa, aaaa, ... }
  - { aa, aba, abba, abbba, ... }
  - { ab, aab, abb, aaab, aabb, abab, abbb, aaaab, ... }

有限オートマトンと正規表現の等価性 （復習）

- 正規表現で表現できる言語は有限オートマトンで受理できる
- 有限オートマトンが受理できる言語は正規表現で表現できる

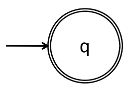
有限オートマトンと正規表現の等価性 （復習）

- RE → NFA → DFA
  - REが表す言語を受理するNFAを作る
  - NFAをシミュレートするDFAを作る
- NFA → DFA → RE
  - NFAをシミュレートするDFAを作る
  - DFAをREに変換する

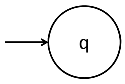
正規表現から有限オートマトンへの変換（復習）

1. 正規表現 ε、∅、a が表す言語を受理する有限オートマトンを作る
2. 正規表現 (P+Q)、(P•Q)、(P*) が表す言語を受理する有限オートマトンは、P や Q が表す言語を受理する有限オートマトンを組合せて作る

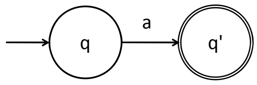
{ε} を受理する有限オートマトン （復習）



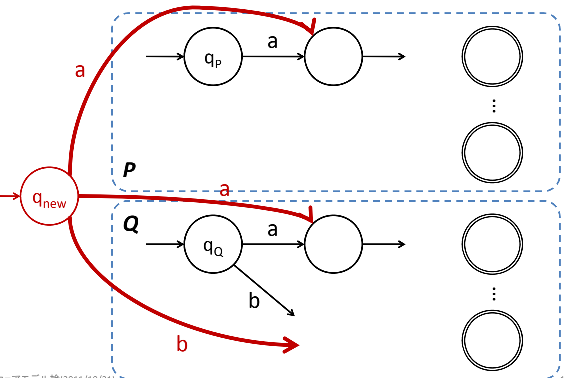
∅ を受理する有限オートマトン （復習）



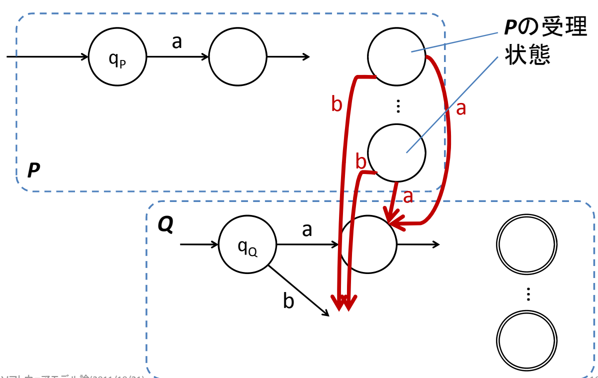
{a} を受理する有限オートマトン （復習）



P+*Q* を受理する有限オートマトン （復習）

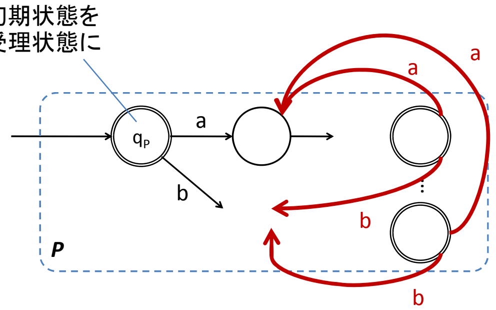


P•*Q* を受理する有限オートマトン （復習）

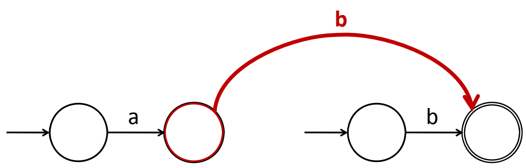


*P** を受理する有限オートマトン （復習）

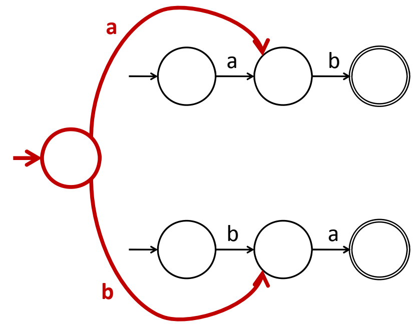
初期状態を
受理状態に



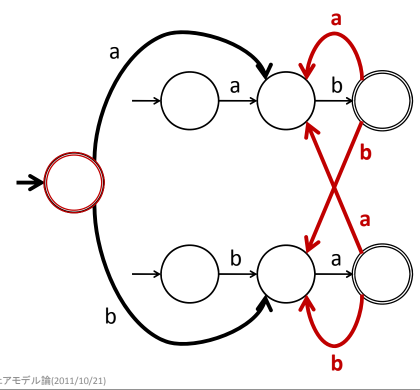
例：ab （復習）



例：ab + ba （復習）



例：(ab + ba)* （復習）



有限オートマトンから正規表現への変換

- 有限オートマトン M = ({1,...,n}, Σ, δ, 1, F)
- r_{ij}^{k} を求める
  - 状態 i から状態 j へ k 以下の状態のみを通過して到達する記号列を表す正規表現
  - r_{ij}^{0} から順に帰納的に
- $r_{1f1}^{n} + \ldots + r_{1fl}^{n}$ が初期状態から受理状態へ到達する記号列の正規表現
  - { f1, ..., fl } は受理状態の集合

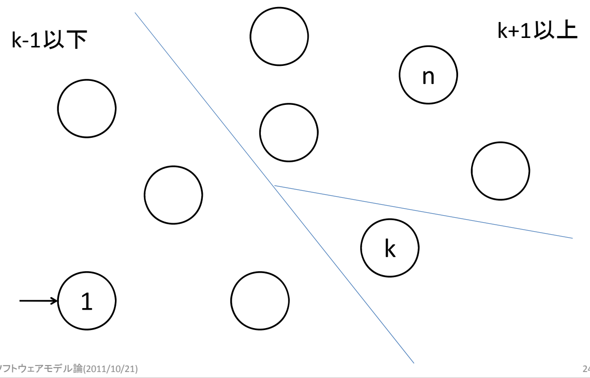
r_{ij}^{0} を求める

- 状態 i から状態 j へ直接到達
- δ(i,a) = j を満たす a の集合を { a_1, ..., a_l } とする
  - そのような a がなければ ∅
- $i \neq j$ ならば $r_{ij}^{0} = a_1 + \ldots + a_l$
- $i = j$ ならば $r_{ij}^{0} = a_1 + \ldots + a_l + \varepsilon$

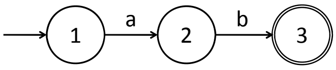
r_{ij}^{k} を求める

- $r_{ij}^{k} = r_{ik}^{k-1} (r_{kk}^{k-1})^* r_{kj}^{k-1} + r_{ij}^{k-1}$
- 状態 k を通過するかしないかの2択
  - 通過する
    1. i から初めて k に到達
    2. k-1 以下のみ通過してまた k に到達（を繰り返す）
    3. k から k-1 以下を通過して j に到達
  - 通過しない
    - k-1 以下の状態のみ通過

r_{ij}^{k} を求める



例



$$
\begin{aligned}
&r_{12}^{1} \\
&= r_{11}^{0} r_{11}^{0} r_{12}^{0} + r_{12}^{0} \\
&= \varepsilon\varepsilon a + a \\
&= a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r_{23}^{1} \\
&= r_{21}^{0} r_{11}^{0} r_{13}^{0} + r_{23}^{0} \\
&= \emptyset\varepsilon\emptyset + b \\
&= b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r_{13}^{2} \\
&= r_{12}^{1} r_{22}^{1} r_{23}^{1} + r_{13}^{1} \\
&= a\varepsilon b + \emptyset \\
&= ab
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r_{13}^{1} \\
&= r_{11}^{0} r_{11}^{0} r_{13}^{0} + r_{13}^{0} \\
&= \varepsilon\varepsilon\emptyset + \emptyset \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r_{32}^{1} \\
&= r_{31}^{0} r_{11}^{0} r_{12}^{0} + r_{32}^{0} \\
&= \emptyset\varepsilon a + \emptyset \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r_{33}^{2} \\
&= r_{32}^{1} r_{22}^{1} r_{23}^{1} + r_{33}^{1} \\
&= \emptyset\varepsilon\varepsilon + \varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r_{22}^{1} \\
&= r_{21}^{0} r_{11}^{0} r_{12}^{0} + r_{22}^{0} \\
&= \emptyset\varepsilon a + \varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r_{33}^{1} \\
&= r_{31}^{0} r_{11}^{0} r_{13}^{0} + r_{33}^{0} \\
&= \emptyset\varepsilon\emptyset + \varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r_{13}^{3} \\
&= r_{13}^{2} r_{33}^{2} r_{33}^{2} + r_{13}^{2} \\
&= ab\varepsilon\varepsilon + ab \\
&= ab
\end{aligned}
$$