

ソフトウェアモデル論(2011年度)
第2回・2011/10/07

桑原 寛明
情報理工学部 情報システム学科

集合

- 「もの」(要素)の集まり
 - 同じ要素は高々1つ
- 部分集合、べき集合
- 集合上の演算
 - 和、積、差、補集合
- 直積

ソフトウェアモデル論(2011/10/07) 2

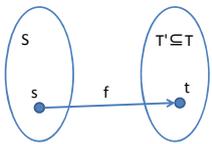
関係

- 「もの」と「もの」の関係
- 直積の部分集合
 - 関係のある「もの」の組合せを全部集める
- 反射、対称、反対称、推移
- 順序関係、同値関係
- 反射推移閉包

ソフトウェアモデル論(2011/10/07) 3

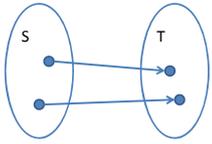
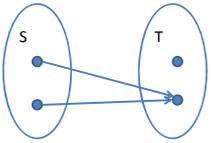
関数(写像)

- 集合 S の各要素に集合 T の要素を1つだけ対応付ける
 - $f: S \rightarrow T$
 - $f(s) = t$
- 定義域
 - 対応付けの元の集合
- 値域
 - 対応付けの先の集合



ソフトウェアモデル論(2011/10/07) 4

関数(写像)

- 単射
 - 同じ要素に対応付けない
- 全射
 - 全要素が値域に含まれる
- 全単射
 - 単射かつ全射

ソフトウェアモデル論(2011/10/07) 5

有限オートマトンと正規表現

ソフトウェアモデル論(2011/10/07) 6

順序機械

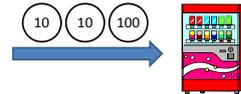
- ある入力を与えると、内部で何かを行って、何かを出力する機械
 - 次の出力は、今までの入力と次の入力によって決定される
- 今までの入力によって機械の内部状態が決定される
 - 入力による内部状態の変化が状態遷移

ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

7

例(自動販売機)

- 120円のジュースを買いたい
- 100円、10円、10円の順に硬貨を投入する
- 自動販売機は硬貨がいくら投入されたか記憶しなければならない
- 120円投入されたらジュースのランプを点灯する

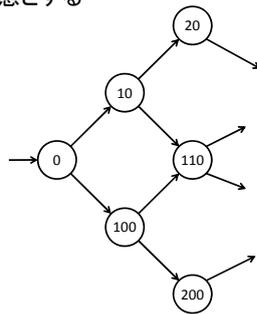


ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

8

例(自動販売機)

投入された金額を状態とする
状態遷移図

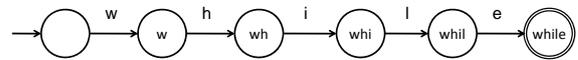


ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

9

その他の例

- 順序回路
- コンパイラの字句解析・構文解析



ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

10

オートマトン

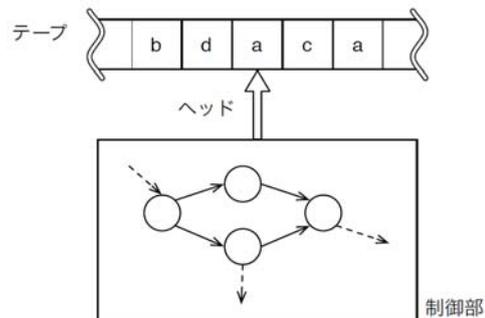
- 順序機械を一般的に記述するモデル
- 計算機が実行する「計算」を抽象的に表現するモデル
 - 有限オートマトン
 - プッシュダウンオートマトン
 - 線形有界(拘束)オートマトン
 - チューリング機械



ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

11

オートマトンの概念図



ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

12

有限オートマトン

- 以下の制限を加えたオートマトン
 - 読み出しのみ
 - 1マス読んだら必ずヘッドを右へ1マス移動
 - 左端のマスから開始

ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

13

有限オートマトンの動作

1. ヘッドの位置のマスを読む
2. 読んだ記号に従って状態遷移する
3. ヘッドを1マス右へ移動する
4. テープ上のすべての記号を読んで状態遷移が終わった時に、状態が最終状態になっていれば入力された記号列を受理する

ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

14

決定性有限オートマトン (DFA)

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

Q : 状態の有限集合 ($\neq \emptyset$)

Σ : 入力記号の有限集合

δ : 状態遷移関数 ($Q \times \Sigma \rightarrow Q$)

q_0 : 初期状態 ($\in Q$)

F : 受理状態の集合 ($\subseteq Q$)

ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

15

DFAの例

- ab の繰返しを受理するDFA

$$Q : \{S_0, S_1, S_2\}$$

$$\Sigma : \{a, b\}$$

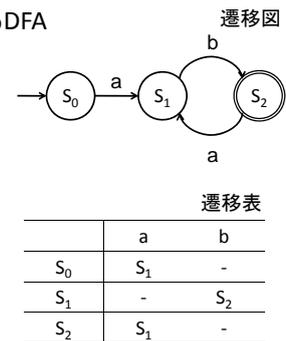
$$\delta : (S_0, a) \rightarrow S_1,$$

$$(S_1, b) \rightarrow S_2,$$

$$(S_2, a) \rightarrow S_1$$

$$q_0 : S_0$$

$$F : \{S_2\}$$



ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

16

主要な概念

- アルファベット
 - 記号の有限集合
- 語
 - 記号列
- アルファベットから作られる語の集合
 - $\Sigma = \{0, 1\}$ ならば
 - $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$
- Σ 上の言語L
 - $L \subseteq \Sigma^*$

ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

17

遷移関数の拡張

- 状態と語を受け取って状態を返すように拡張

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$$

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$$

$$\hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a)$$

ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

18

受理言語

- $\delta(q_0, w) \in F$ ならば語 w は受理される
- 開始状態から開始して受理状態で終了
- オートマトン M の受理言語
 $L(M) = \{w \mid w \in \Sigma^* \wedge \delta(q_0, w) \in F\}$
- 受理される語の集合
- $L(M_1) = L(M_2)$ の時 M_1 と M_2 は等しい
- オートマトンが等しいとは受理言語が等しいこと

ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

19

非決定性有限オートマトン (NFA)

- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- Q : 状態の有限集合 ($\neq \emptyset$)
 - Σ : 入力記号の有限集合
 - δ : 状態遷移関数 ($Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$)
 - q_0 : 初期状態 ($\in Q$)
 - F : 受理状態の集合 ($\subseteq Q$)

ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

20

NFAにおける語の受理

- NFAでは遷移先が2つ以上の場合がある
- e.g. $\delta(q, a) = \{q', q''\}$
- 入力された語に対して遷移列も複数ある
- 受理状態で終了する遷移列が1つでもあれば受理する

ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

21

NFAの例

- a の1回以上の繰返しを受理するNFA

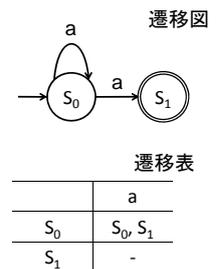
$Q : \{S_0, S_1\}$

$\Sigma : \{a\}$

$\delta : (S_0, a) \rightarrow \{S_0, S_1\}$

$q_0 : S_0$

$F : \{S_1\}$



ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

22

DFAとNFAの等価性

- DFAはNFAの特殊な場合である
- DFAは遷移先が一意に決められるNFA
- NFAをシミュレートするDFAを作ることができる
- 受理言語が同じ
- 受理言語が同じであればNFAの方が作りやすいことが多い

ソフトウェアモデル論(2011/10/07)

23