ソフトウェアモデル論（2011年度）
第1回・2011/09/30

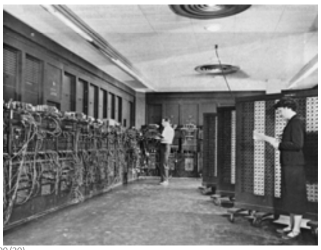
桑原 寛明
情報理工学部 情報システム学科

ソフトウェアモデル論

- ソフトウェア
  - 計算機にどのような計算を行うのか指示するもの
  - 翻って、計算機が行う計算を表現するもの
- モデル
  - 対象から本質を抽出してまとめたもの
- そもそも、「計算」とは何か？

歴史 (1/2)

- 電子計算機の出現は1940年代半ば頃
  - ENIAC など
  - その後数年程度でプログラム内蔵方式が出現



ENIAC
（出典：Wikimedia project）

歴史 (2/2)

- 電子計算機の出現以前に、数学者が「関数を計算するとはどういうことか」研究していた
  - 正確には、「計算できる関数とは何か」

チャーチの提唱

- 「計算できる関数」とは
  - 帰納的関数
  - λ計算
  - チューリング機械

  能力は同じ

  で計算できる関数ということにしよう
- この過程で、「計算する」とはどういうことか数学的に記述された
  - 特にチューリング機械で顕著

本講義のトピックス

- 有限オートマトンと正規表現
- チューリング機械
- 命題論理
- モデル検査

計算機科学の理論的な土台

オートマトンと論理の直接的な応用

ソフトウェアモデル論

ソフトウェアによって表現される

計算機が実行する計算の

形式モデルの基礎と応用を論ずる

数学的準備

集合

- 互いに区別できる「もの」の集まり
  - 「もの」を元とか要素と呼ぶ
  - 同じ要素は高々1つ
- { a, b, c }, { a, b, … }, { x | 条件 }
- $x \in S$
  - x は集合 S の要素
- 持っている要素が同じであれば等しい集合

空集合

- 要素を1つも持たない集合
- ϕ, {} などと書く

部分集合

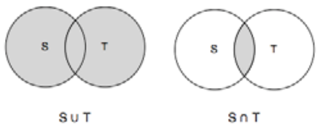
- ある集合の一部の要素からなる集合
  - { a, b, c } に対して { a }, { a, c } など
  - 空集合も部分集合
- $T \subseteq S$
  - 集合 T は集合 S の部分集合
  - T = S でもよい
- $T \subset S$
  - 集合 T は集合 S の真部分集合
  - T = S ではない

べき集合

- ある集合のすべての部分集合からなる集合
  - { a, b, c } に対して { ϕ, { a }, { b }, { c }, { a, b }, { a, c }, { b, c }, { a, b, c } }
- 2^S
  - 集合 S のべき集合

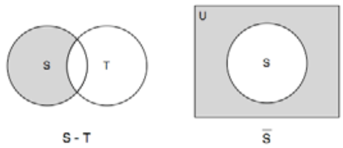
演算

- 和集合
  - 2つの集合の要素をすべて集めた集合
- 積集合
  - 2つの集合の両方に含まれる要素を集めた集合



演算

- 差集合
  - 一方の集合から他方の集合に含まれる要素を除いた集合
- 補集合
  - ある集合に含まれない要素からなる集合



直積

- 順序対
  - (s, t)
  - 集合 S の要素 s と、集合 T の要素 t の組
    - ただし、順序付き
    - (s, t) と (t, s) は異なる
- 順序対の集合が直積
  - S×T
- { a, b }×{ 1, 2 } = { (a,1), (a,2), (b,1), (b,2) }

関係

- 「もの」と「もの」の間に何らかの関係がある
  - 「関係」を一般的に書くには？
- 「関係」がある「もの」と「もの」の組み合わせを列挙すればよい
  - 組み合わせは順序対
- 関係は直積の部分集合

例えば、数の大小関係

- S = { 1, 2, 3 } 上の大小関係 <
  - S×S の部分集合
- 1 < 2, 1 < 3, 2 < 3 なので
  < = { (1,2), (1,3), (2,3) }

反射性

- 任意の s∈S に対して sRs
  - R は S 上の関係
- 例えば { (a,a), (b,b) }

対称性

- xRy ならば yRx
  - R は S 上の関係で x, y∈S
- 例えば { (a,b), (b,a), (c,c) }

反対称性

- xRy かつ yRx ならば x = y
  - R は S 上の関係で x, y∈S
- 例えば { (a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c) }

推移性

- xRy かつ yRz ならば xRz
  - R は S 上の関係で x, y, z∈S
- 例えば { (a,b), (a,c), (b,c) }

順序関係

- 反射的 かつ 反対称的 かつ 推移的 な関係
- 全順序関係
  - 集合 S 上の順序関係 R
  - S の任意の2つの要素間に R または R^{-1} が成立

同値関係

- 反射的 かつ 対称的 かつ 推移的 な関係

関係の合成

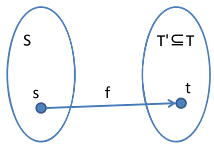
- 2つの関係を順に到達できる関係
  - $R_1 \subseteq S \times T$, $R_2 \subseteq T \times U$
  - $R_1 \circ R_2 = \{ (s,u) \mid \exists t \in T .\ sR_1t$ かつ $tR_2u \}$
- { (1,a) } と { (a,A) } を合成すると { (1,A) }

反射推移閉包

- 集合 S 上の関係 R の反射推移閉包
  - R を0回以上たどって到達できる要素間の関係
- S = { a, b, c }, R = { (a,b), (b,c) } とすると
  R* = { (a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c) }

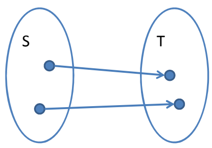
関数（写像）

- 集合 S の各要素に集合 T の要素を対応付ける
  - f : S → T
  - f(s) = t
- 定義域
  - 対応付けの元の集合
- 値域
  - 対応付けの先の集合

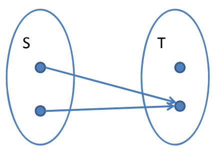


関数（写像）

- 単射
  - 同じ要素に対応付けない



- 全射
  - 全要素が値域に含まれる
- 全単射
  - 単射かつ全射



関数の合成

- f : S → T と g : T → U を合成
  - h = g ∘ f : S → U