ソフトウェアモデル論（2010 年度）演習問題

桑原 寛明
情報理工学部 情報システム学科

演習問題 1 有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ の受理言語はどのように定義されるか説明せよ．

演習問題 2 有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が以下のよう定義されるとする．

$$
\begin{aligned}
Q &: \{S_0, S_1, S_2\} \\
\Sigma &: \{0, 1\} \\
\delta &: (S_0, 0) \to S_0,\ (S_0, 1) \to S_1,\ (S_1, 0) \to S_1,\ (S_1, 1) \to S_2,\ (S_2, 0) \to S_0,\ (S_2, 1) \to S_1 \\
q_0 &: S_0 \\
F &: \{S_2\}
\end{aligned}
$$

1. M の遷移図を描け．
2. 以下の語の中で M が受理するものをすべて挙げよ．
   - 1111
   - 01110
   - 1101011
   - 00110011
   - 010101010
3. M の受理言語を正規表現で表せ．
4. M の受理言語を表す正規表現を講義資料 3.7 節の方法で求めよ．

演習問題 3 $\Sigma = \{0, 1\}$ とする．以下の言語を正規表現で表し，受理する決定性有限オートマトンを作れ．

1. 11 で始まる語すべて
2. 11 で終わる語すべて
3. 11 で終わらない語すべて
4. 1 で始まり 1 で終わる語すべて
5. 3 つ並ぶ 1 を含む語すべて
6. 1 をただ一つだけ含む語すべて
7. 1 を少なくとも一つは含む語すべて

演習問題 4 非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が以下のように定義されるとする．

$$
\begin{aligned}
Q &: \{S_0, S_1, S_2\} \\
\Sigma &: \{0, 1\} \\
\delta &: (S_0, 0) \to \{S_1, S_2\},\ (S_0, 1) \to \{S_1\},\ (S_1, 0) \to \{S_2\},\ (S_1, 1) \to \{S_1, S_2\}, \\
&\quad (S_2, 0) \to \{S_2\},\ (S_2, 1) \to \{S_2\} \\
q_0 &: S_0 \\
F &: \{S_2\}
\end{aligned}
$$

1. M の遷移図を描け．
2. M の受理言語を正規表現で表せ．
3. M と受理言語が等しい決定性有限オートマトンを講義資料 3.4 節の方法で作れ．
4. M の受理言語を表す正規表現を講義資料 3.7 節の方法で求めよ．
5. M が受理しない語をすべて挙げよ．

演習問題 5 $\Sigma = \{a, b\}$ 上の以下の言語を表す正規表現を与えよ．

1. 2 個以上並んだ a と 2 個以上並んだ b をともに含む語の集合
2. 2 個以上並んだ a と 2 個以上並んだ b のいずれも含まない語の集合
3. 右から 3 つ目の記号が b である語の集合
4. b を 3 個以上含まない語の集合
5. $\{a^i b^j \mid i + j$ が偶数 $\}$

演習問題 6 以下の正規表現によって受理言語が表される有限オートマトンを作れ．

1. $b^* a (a + b)^*$
2. $(a + ba) b^* a + bb$
3. $(b(b + ab)^* aa)^* a^*$
4. $((a + b)(a + b))^* + ((a + b)(a + b)(a + b))^*$

演習問題 7 以下の言語を受理する有限オートマトンは存在しない，つまり以下の言語は正規言語ではないことを反復補題を用いて示せ．ここで，$\Sigma = \{a, b\}$ とする．また，x^R は x を逆順にした語を表す．例えば $(aab)^R = baa$ である．

1. $L = \{\boldsymbol{w} \in \Sigma^* \mid \boldsymbol{w}$ 中の a と b の個数が等しい $\}$
2. $L = \{\boldsymbol{w} \in \Sigma^* \mid \boldsymbol{w}$ 中の a の個数が b の個数より少ない $\}$
3. $L = \{x \mid x \in \Sigma^*, x = x^R\}$（ヒント：反復補題の定数 n に対して $a^n b a^n$ を考えよ．）

演習問題 8 チューリング機械 $M = (Q, \delta, \Sigma, \Gamma)$ が以下のように定義されるとする.

$$
\begin{aligned}
Q &: \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_{fin}\} \\
\delta &: (q_0, 0) \to (q_1, 0, R),\ (q_0, 1) \to (q_2, 1, R), \\
&\quad (q_1, 0) \to (q_1, 0, N),\ (q_1, 1) \to (q_1, 1, N),\ (q_1, B) \to (q_{fin}, B, L) \\
&\quad (q_2, 0) \to (q_2, 0, R),\ (q_2, 1) \to (q_2, 1, R),\ (q_2, B) \to (q_3, B, L) \\
&\quad (q_3, 0) \to (q_3, 1, L),\ (q_3, 1) \to (q_4, 0, L), \\
&\quad (q_4, 0) \to (q_4, 0, L),\ (q_4, 1) \to (q_4, 1, L),\ (q_4, B) \to (q_5, B, R) \\
&\quad (q_5, 0) \to (q_6, B, R),\ (q_5, 1) \to (q_{fin}, 1, N), \\
&\quad (q_6, 0) \to (q_6, B, R),\ (q_6, 1) \to (q_{fin}, 1, N),\ (q_6, B) \to (q_{fin}, 0, N) \\
\Sigma &: \{0, 1\} \\
\Gamma &: \{0, 1, B\}
\end{aligned}
$$

1. M の遷移図を描け.
2. 以下の各入力に対して計算列を示せ. 停止しない場合は 4 ステップ目まで示せ.
   (a) 0
   (b) 1
   (c) 010
   (d) 100
   (e) 110
3. M がどのような関数を計算しているか述べよ.
4. 配付資料の例 2.10 の方法で M をコード化せよ.

演習問題 9 以下の問に答えよ.

1. 関数 f がチューリング機械計算可能であるとはどういうことか.
2. チャーチの提唱とは何か.
3. 万能チューリング機械とは何か.

演習問題 10 論理式集合 $\Phi = \{r \to (p \wedge q), r \vee \neg q\}$ について以下の問に答えよ.

1. Φ のモデルをすべて求めよ.
2. $\{p \to q, p \to (q \to r), r \wedge \neg p \to \neg r, (\neg p \wedge \neg q) \to r\}$ から Φ の論理的帰結である論理式をすべて選択せよ.
3. 2. で挙げた論理式それぞれについて, 自然演繹によって Φ から導出せよ.

演習問題 11 以下を自然演繹によって示せ.

1. $p \wedge q, r \wedge (s \wedge t) \vdash p \wedge s$
2. $p \wedge q, q \wedge r \vdash q$
3. $(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$
4. $p \to q \vdash (p \wedge \neg q) \to \neg p$
5. $q \to r \vdash (p \to r) \to (q \to r)$
6. $p \to (q \to r), q \vdash p \to (q \wedge r)$

7. $p \to (q \to r), \neg r \vdash p \to \neg(q \lor r)$
8. $p \to (q \lor r), \neg q, \neg r \vdash \neg p$
9. $\vdash \neg p \lor (\neg q \lor p)$
10. $(p \land q) \to r, r \to s, p \land \neg s \vdash \neg q$

演習問題 12 以下の問に答えよ．

1. 自然演繹が健全であるとはどういうことか．
2. 自然演繹が完全であるとはどういうことか．

演習問題 13 以下の命題を CTL 式として記述せよ．

1. 命題 P が成り立つ可能性がある．
2. 命題 P が成り立つことは絶対にない．
3. 命題 P が成り立つことなく命題 Q が成り立つ可能性がある．
4. いつでも命題 P が成り立つ可能性がある．
5. 命題 P が成り立てば必ず命題 Q は成り立つ．
6. 命題 P が成り立たなければ命題 Q は成り立たない．
7. 命題 P はいつか必ず成り立つ．

演習問題 14 Kripke 構造 $M = (S, R, L)$ が以下のように定義されるとする．

$S : \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$
$R : R(s_0, s_1), R(s_0, s_3), R(s_1, s_1), R(s_1, s_2), R(s_2, s_0), R(s_3, s_0), R(s_3, s_2)$
$L : L(s_0) = \{p, q\}, L(s_1) = \{r\}, L(s_2) = \{p\}, L(s_3) = \{q, r\}$

1. M の遷移図を描け．
2. s_0 を根として M の計算木を描け．高さ 4 まででよい．
3. 以下の各 CTL 式 ϕ について $label_M(s_0)$ を求めて $M, s_0 \models \phi$ か否か判定せよ．
   (a) $\mathbf{AF}\, q$
   (b) $\mathbf{AG}\, \mathbf{EF}\, (p \lor r)$
   (c) $\mathbf{EX}\, \mathbf{EX}\, r$
   (d) $\mathbf{AG}\, \mathbf{AF}\, q$

演習問題 15 以下に示す 2 つのプロセス C および P からなる並行プログラムを考える．プロセス C と P は変数 `n` と `f` を共有しており，`n` の初期値は 0，`f` の初期値は `F` である．

プロセス C

```
1: if (n == 0) goto 1;
2: if (f == T) goto 1; else f = T;
3: n = n - 1; f = F; goto 1;
```

プロセス P

```
1: if (n == 2) goto 1;
2: if (f == T) goto 1; else f = T;
3: n = n + 1; f = F; goto 1;
```

1. プロセス C と P を非同期並行合成して得られる状態遷移図を示せ．ただし，C の行番号，P の行番号，`n` の値，`f` の値，の 4 項組を状態とせよ．`n` と `f` の値はその行を実行する直前の値とすること．初

期状態は $(1,1,0,F)$ であり，初期状態から到達不能な状態は省略してよい．

2. 命題変数 C_i，P_i，V_n，V_f はそれぞれ以下の命題を表すとする．

   C_i：プロセス C の i 行目を実行

   P_i：プロセス P の i 行目を実行

   N_v：変数 `n` の値が v

   F_v：変数 `f` の値が v

   これらの命題変数を利用して，(1) で得られた状態遷移図の各状態 (c,p,n,f) に命題変数の集合 $\{C_c, P_p, N_n, F_f\}$ を割り当てる．すなわち，ラベル付け関数 L を $L((c,p,n,f)) = \{C_c, P_p, N_n, F_f\}$ と定義し，(1) で得られた状態遷移と L から Kripke 構造 M を構成する．この時，以下のそれぞれについて成り立つか否か判定せよ．

   (a) $M,(1,1,0,F) \models \mathbf{AG}\,\neg(C_3 \wedge P_3)$

   (b) $M,(1,1,0,F) \models \mathbf{AF}\,P_3$

   (c) $M,(1,1,0,F) \models \mathbf{AG}\,((C_1 \wedge F_T) \to \mathbf{EF}\,(C_0 \vee C_2))$